PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

Mathematische Logik
Blatt 6
Abgabe: 05.06.2023, 18 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**

In der Sprache $\mathscr{L} = \{+, \cdot, -, c_0, c_1, <\}$ sei $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, -_{\mathbb{R}}, 0, 1, <_{\mathbb{R}})$. Beachten Sie, dass es in jedem Modell $\mathscr{N}$ von $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$ für jede natürliche Zahl n ein eindeutiges Element x mit $x \cdot^{\mathscr{N}} (\underbrace{c_1^{\mathscr{N}} +^{\mathscr{N}} (\ldots +^{\mathscr{N}} c_1^{\mathscr{N}}}_{n \text{ mal}})) = c_1^{\mathscr{N}}$ gibt. Dieses bezeichnen wir als $\frac{1}{n}$.

Nun heißt ein positives Element y aus einem solchen Modell $\mathscr{N}$ *infinitesimal*, falls $0 < y$ und $y < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt. Zeigen Sie, dass es ein Modell $\mathscr{N}$ von $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$ mit einem infinitesimalen Element gibt.

Hinweis. Fügen Sie eine Konstante zur Sprache hinzu und zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes die Konsistenz einer geeigneten Theorie.

Definition. Eine Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathscr{L}$-Strukturen heißt *axiomatisierbar*, wenn es eine $\mathscr{L}$-Theorie T gibt, so dass

$$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}(T) = \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A}\ \mathscr{L}\text{-Struktur mit } \mathscr{A} \models T\}.$$

Sie heißt *endlich axiomatisierbar*, wenn es eine endliche Menge von Aussagen $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ gibt mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.**

Es sei $L = \{<\}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen.

a) Zeigen Sie: Die Klasse aller unendlichen $\mathscr{L}$-Strukturen, auf denen die Interpretation von $<$ eine strikte lineare Ordnung definiert, ist axiomatisierbar.

b) Zeigen Sie: Die Klasse aller endlichen $\mathscr{L}$-Strukturen, auf denen die Interpretation von $<$ eine strikte lineare Ordnung definiert, ist nicht axiomatisierbar.

   Hinweis: Widerspruch per Kompaktheitssatz

c) Folgern Sie: Die Klasse aus a) ist nicht endlich axiomatisierbar.

d) Betrachten Sie nun die Klasse aller $\mathscr{L}$-Strukturen mit mindestens zwei Elementen auf denen die Interpretation von $<$ eine dichte strikte lineare Ordnung definiert. Zeigen Sie, dass diese endlich axiomatisierbar ist und dennoch alle Strukturen dieser Klasse unendlich groß sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

Es sei $\mathscr{B}$ eine Boole'sche Algebra in der Sprache $\mathscr{L}_{BA} = \{\sqcap, \sqcup, c, 0, 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass aus den Axiomen in Definition 5.1 im Skript auch das Doppelnegationsgesetz $x^{cc} = x$ folgt.

Ab hier dürfen Sie ohne Beweis alle im Skript genannten weiteren Regeln (z.B. de Morgan'sche Regeln, Absorptionsgesetze,...) benutzen.

(Bitte wenden!)

b) Zeigen Sie, dass die Bedingungen $x \sqcap y = x$ und $x \sqcup y = y$ äquivalent sind und eine (nicht strikte) partielle Ordnung $x \sqsubseteq y$ auf $\mathscr{B}$ definieren.

c) Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Ordnung 0 minimal und 1 maximal ist. Außerdem ist $x \sqcap y$ ein Infimum (größte untere Schranke) der Menge $\{x, y\}$.

Definition. Ein Element x der Boole'schen Algebra $\mathscr{B}$ heißt *Atom*, falls $x \neq 0$, aber kein Element $y \neq 0$, $y \neq x$ aus $\mathscr{B}$ existiert mit $y \sqsubseteq x$. Die Boole'sche Algebra heißt *atomar*, wenn es zu jedem Element $y \neq 0$ ein Atom x mit $x \sqsubseteq y$ gibt.

d) Zeigen Sie, dass die Potenzmengenalgebra $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup, \complement, \emptyset, \mathbb{N})$ atomar ist.

e) In der Sprache $\mathscr{L} = \{P\}$ mit einem einstelligen Relationszeichen sei nun $\mathscr{B}$ die Tarski-Lindenbaum-Algebra $\mathscr{F}(\mathscr{L})$. Weiter sei φ die $\mathscr{L}$-Formel $\exists v_1 \exists v_2 \neg v_1 \doteq v_2$, auch abgekürzt als $\exists^{\geq 2} v\, v \doteq v$. Zeigen Sie, dass es kein Atom $[\![\psi]\!]$ gibt mit $[\![\psi]\!] \sqsubseteq [\![\varphi]\!]$.

Es gibt auch atomare Tarski-Lindenbaum-Algebren. Dies gilt beispielsweise für $\mathscr{F}_0(\mathscr{L})$ in der Sprache von Aufgabe *e*). Hierzu nutzt man, dass alle $\mathscr{L}$-Aussagen bis auf Äquivalenz durch $\neg, \wedge$ und $\vee$ aus $\mathscr{L}$-Aussagen der Form $\exists^{\geq k} v P v$ beziehungsweise $\exists^{\geq k} v \neg P v$ entstehen[1]. Wenn Sie in der Pfingstpause ein bisschen knobeln möchten, können Sie sich überlegen, wie die Atome von $\mathscr{F}_0(\mathscr{L})$ aussehen. Hierzu kann es hilfreich sein, die $\mathscr{L}$-Strukturen (bis auf Isomorphie) zu verstehen.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.

[1] Dies kann man mit Methoden zeigen, welche in der Vorlesung Modelltheorie erlernt werden