PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

Mathematische Logik

Blatt 7

Abgabe: 12.06.2023, 18 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**

Sei x eine Menge, welche aus transitiven Mengen besteht. Zeigen Sie, dass $\bigcup x$ transitiv ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass das Paarmengenaxiom aus dem Potenzmengenaxiom, dem Ersetzungsaxiom und der Existenz der leeren Menge folgt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Wir ordnen die endlichen Folgen natürlicher Zahlen lexikographisch, d.h. $a_0,\ldots,a_{m-1} <_{\text{lex}} b_0,\ldots,b_{n-1}$ falls entweder $a_0,\ldots,a_{m-1}$ ein echtes Anfangsstück von $b_0,\ldots,b_{n-1}$ ist oder $a_{i_0} < b_{i_0}$ für $i_0 = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Folgen natürlicher Zahlen durch $<_{\text{lex}}$ nicht wohlgeordnet ist.

b) Beweisen Sie, dass die Menge der schwach monoton absteigenden Folgen durch $<_{\text{lex}}$ wohlgeordnet ist. Dabei ist $a_0,\ldots,a_{m-1}$ schwach monoton absteigend, falls für $0 \leq i \leq m-2$ gilt $a_i \geq a_{i+1}$.

Nun modifizieren wir die Ordnung derart, dass $a_0,\ldots,a_{m-1} \tilde{<} b_0,\ldots,b_{n-1}$, falls $m < n$ oder $m = n$ und $a_0,\ldots,a_{m-1} <_{\text{lex}} b_0,\ldots,b_{n-1}$.

c) Zeigen Sie: Mit dieser Ordnung ist die Menge aller endlichen Folgen natürlicher Zahlen wohlgeordnet.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

Wir nehmen an, dass ZFC konsistent ist und wählen ein Modell $\mathcal{M} \models \mathsf{ZFC}$. Dann betrachten wir die folgenden $\mathscr{M}$-Mengen:

Es sei $V_0 := \emptyset^{\mathscr{M}}$. Für n aus $\mathbb{N}$ sei $V_{n+1} := \mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(V_n)$ und schließlich $V_\infty := \bigcup^{\mathscr{M}}\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Wir schreiben $\in$ für $\in^{\mathscr{M}}$ und $\subseteq$ für $\subseteq^{\mathscr{M}}$. Zeigen Sie, dass für alle n aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x \in V_n$, dann $x \subseteq V_n$. Insbesondere ist dann $V_n \subseteq V_{n+1}$, also $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$.

b) Nun machen wir V_∞ zu einer $\mathscr{L}_{ML}$-Struktur $\mathscr{V}$ durch die Interpretation von $\in^{\mathscr{V}}$ als die von $\in^{\mathscr{M}}$ induzierte Relation. Dies bedeutet $\in^{\mathscr{V}} = \in^{\mathscr{M}}\restriction_{V_\infty \times V_\infty}$. Dann ist $\mathscr{V}$ ein Modell von ZF bis auf das Unendlichkeitsaxiom. Zeigen Sie dies für die folgenden Axiome:

   i) Extensionalität
   ii) Vereinigung
   iii) Aussonderung
   iv) Fundierung

   Hinweis/Anmerkung: Für Aussonderung überlegen Sie sich, wie Sie die Formel ändern müssen. Für diesen Teil reicht eine anschauliche Begründung (ohne Beweis), warum die geänderte Formel funktioniert.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.