Mathematische Logik

Blatt 8

Abgabe: 19.06.2023, 18 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeigen Sie, wahlweise mit dem Lemma von Zorn, dem Auswahlaxiom oder dem Wohlordnungssatz: Für nicht-leere Mengen A und B existiert genau dann eine Surjektion $f : A \to B$, wenn es eine Injektion $g : B \to A$ gibt.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Es seien α, β und γ Ordinalzahlen. Benutzen Sie für diese Aufgabe die formale Definition der Ordinalzahladdition und nicht die Charakterisierung aus Satz 6.26.

a) Zeigen Sie die strikte Linksmonotonie der Addition: Wenn $\beta < \gamma$ ist, so folgt $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

b) Folgern Sie die linke Kürzungsregel: Wenn $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, so folgt $\beta = \gamma$.

c) Folgt umgekehrt auch aus $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$, dass $\beta = \gamma$?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es seien α und β Ordinalzahlen.

a) Zeigen Sie: Wenn $\alpha \leq \beta$ gilt, existiert eine Ordinalzahl γ mit $\alpha + \gamma = \beta$.

Hinweis: Supremum

Ab hier dürfen Sie alle Eigenschaften der Ordinalzahladditon und -multiplikation aus Satz 6.27 im Skript benutzen.

b) Beweisen Sie die Division mit Rest für Ordinalzahlen: Gegeben α und β existieren Ordinalzahlen γ und δ mit $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ und $\delta < \beta$.

c) **Bonusfrage** (2 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass γ und δ in b) eindeutig sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Wir definieren mit Hilfe des Rekursionssatz die Ordinalexponentiation zur Basis ω als

$$\begin{cases} \omega^{\underline{0}} = \underline{1}, \\ \omega^{\alpha+1} = \omega^{\alpha} \cdot \omega, \\ \omega^{\lambda} = \sup\limits_{\beta<\lambda} \omega^{\beta}, \text{ für } \lambda \text{ Limeszahl} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\underline{1} \leq \omega^{\alpha}$ für jede Ordinalzahl α.

b) Schließen Sie daraus, dass $\alpha \leq \omega^{\alpha}$ für jede Ordinalzahl α.

c) Wir definieren nun rekursiv eine Funktion $f : \omega \to \mathbb{ORD}$ als $f(\underline{0}) = \omega^{\underline{0}} = \underline{1}$ und $f(\alpha+1) = \omega^{f(\alpha)}$ sonst. Beachten Sie, dass $f(\alpha)$ eine Limeszahl ist, falls $\alpha \neq \underline{0}$.

Es sei $\varepsilon_0 = \sup\limits_{\alpha\in\omega} f(\alpha)$. Begründen Sie, dass ε_0 eine Limeszahl ist. Schließen Sie daraus, dass $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.

(Bitte wenden!)

Bonusaufgabe 5 (3 Bonuspunkte)**.** Zeigen Sie, dass die geordnete Summe und das geordnete Produkt von zwei Wohlordnungen wieder Wohlordnungen sind. (Sie können annehmen, dass geordnete Summe und geordnete Produkt von Ordnungen wieder Ordnungen sind.)

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.