PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

# Mathematische Logik

Blatt 9

Abgabe: 26.06.2023, 18 Uhr

Wir führen folgende Notationen und Terminologie ein: Für Mengen $A$ und $B$ wird die Menge der Abbildungen von $A$ nach $B$ mit ${}^{A}B$ geschrieben. Die Menge der endlichen Folgen mit Einträgen aus $A$ wird als ${}^{<\omega}A$ geschrieben. Eine Folge der Länge $n$ mit Einträgen aus $A$ kann als Funktion $f : \{0, \ldots, n-1\} \to A$ verstanden werden, indem $f(i)$ das $(i+1)$-te Element der Folge ist.

**Aufgabe 1** (2 Punkte)**.**

Sei $G : {}^{<\omega}\{0,1\} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion zwischen den endlichen $\{0,1\}$-Folgen und $\mathbb{N}$. Mithilfe von $G$ lässt sich eine Abbildung $* : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ definieren durch

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \quad \mapsto \quad f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \text{ mit } \ f^*(n) = G(f|_{\{0,\ldots,n-1\}})$$

a) Zeigen Sie, dass das Bild $A = \{f^* \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat.

b) Beweisen Sie, dass $A$ eine Menge fast disjunkter Funktionen ist, d.h. für $f \neq g$ aus ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ ist $\{n \mid f^*(n) = g^*(n)\}$ endlich.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.**

In dieser Aufgabe werden Teilmengen der Menge $X$ der unendlichen Folgen mit Einträgen aus $\mathbb{N}$[1] betrachtet.

a) Zeigen Sie, dass die Menge der schwach monoton fallenden Folgen abzählbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der stark monoton wachsenden Folgen überabzählbar ist.

**Aufgabe 3** (6 Punkte)**.**

Es seien $\alpha \leq \beta$ zwei Ordinalzahlen. Eine Abbildung $f : \alpha \to \beta$ heißt *konfinal*, falls für alle $\beta' < \beta$ ein $\alpha' < \alpha$ existiert mit $f(\alpha') \geq \beta'$. Die *Konfinalität* von $\beta$ ist definiert als

$$\mathrm{cf}(\beta) := \min\{\, \alpha \mid \text{ es gibt } f : \alpha \to \beta \text{ konfinal } \}$$

a) Sei $\beta$ eine Limesordinalzahl und $f : \alpha \to \beta$ für ein $\alpha \leq \beta$. Zeigen Sie: Die Abbildung $f$ ist genau dann konfinal, wenn $\beta = \sup\{f(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$.

b) Zeigen Sie: Für jede beliebige Ordinalzahl $\alpha$ ist $\mathrm{cf}(\alpha)$ eine Kardinalzahl.

c) Es sei $\alpha$ eine Limesordinalzahl. Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

d) Beweisen Sie, dass für jede Kardinalzahl $\kappa$ der Nachfolger $\kappa^+$ regulär ist, d.h. dass $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$.

**(Bitte wenden!)**

[1] Analog zu den endlichen Folgen kann man auch unendliche Folgen mit Einträgen in $\mathbb{N}$ als Funktionen auffassen - in diesem Fall als Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.**
Die *Ackermannfunktion* $A\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert durch

- $A(x, 0) = 2 + x$ für alle $x$ aus $\mathbb{N}$,
- $A(0, 1) = 0$ und $A(0, y) = 1$ für $y > 1$ sowie
- $A(x + 1, y + 1) = A(A(x, y + 1), y)$ für $x$ und $y$ aus $\mathbb{N}$ beliebig.

a) Bestimmen Sie die Funktionen $A_n(x) := A(x, n)$, für $n = 0, 1, 2, 3$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes feste $n$ die Funktion $A_n$ primitiv rekursiv ist.

Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass die Funktion $n \mapsto A(n, n)$ rekursiv, aber nicht primitiv rekursiv ist.

**Bonusaufgabe 5** (5 Bonuspunkte)**.**
Auf der Menge der echt positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_{>0}$ werden die folgenden zwei Relationen betrachtet:

1. Die Teilbarkeit $a|b$, wobei für $a$ und $b$ aus $\mathbb{N}$ gilt, dass $a|b$, falls es ein $c$ aus $\mathbb{N}$ gibt mit $a \cdot c = b$
2. Die strikte Teilbarkeit $a|^*b$, welche für $a$ und $b$ aus $\mathbb{N}$ gilt, falls $a|b$ und $a \neq b$.

Nun wird $\mathbb{N}_{>0}$ auf zwei Arten als $\mathscr{L}_{ML}$-Struktur betrachtet: Als Struktur $\mathscr{N}_1$ bei der $\in$ durch $|$ interpretiert wird (also $a \in^{\mathscr{N}_1} b$ falls $a|b$) sowie als Struktur $\mathscr{N}_2$ bei der $\in^{\mathscr{N}_2} = |^*$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass in $\mathscr{N}_1$ Extensionalität, aber nicht das Paarmengenaxiom gilt.

b) Zeigen Sie, dass in $\mathscr{N}_2$ Existenz der leeren Menge sowie Fundierung gilt, aber keine Extensionalität.

---

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.