Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 1

Aufgabe 1.
(a) Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wie viele Wörter der Länge 4 gibt es über Σ? Wie viele der Länge n für $n \in \mathbb{N}$? Wie viele Wörter der Länge n gibt es über einem Alphabet Σ', wenn Σ' genau k Buchstaben enthält?

(b) Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Ordnen Sie die folgenden Wörter bezüglich $\leq_d$ und bezüglich $\leq_{lex}$:

$$affe,\ fechdeg,\ bach,\ ha,\ bade,\ f$$

Dabei bezeichne $\leq_d$ die Ordnung auf Σ^*, welche voll der Ordnung im Lexikon entspricht, und $\leq_{lex}$ die lexikographische Ordnung auf Σ^*.

Aufgabe 2. Für $n \geq 1$ sei $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ ein Alphabet mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$. Ferner seien $\leq_d$ und $\leq_{lex}$ wie in Aufgabe 1.

(a) Geben Sie eine bezüglich $\leq_d$ absteigende unendliche Folge $(w_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern an, das heißt eine Folge $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\ldots \lneq_d w_2 \lneq_d w_1 \lneq_d w_0.$$

(b) Bestimmen Sie alle Wörter $w \in \Sigma^*$, für die die Menge $\{v \mid v \leq_d w\}$ unendlich ist.

(c) Zeigen Sie, daß für alle $w \in \Sigma^*$ die Menge $\{v \mid v \leq_{lex} w\}$ endlich ist.

Aufgabe 3. Nehmen Sie an, daß Ihr Computer zur Durchführung eines Rechenschrittes 10^{-8} Sekunden benötigt. Berechnen Sie seine Laufzeit für je einen Algorithmus, der n, n^4 bzw. 2^n Rechenschritte benötigt, für $n = 10, 20$ und 80. Wählen Sie für die Antwort eine informative Maßeinheit (Sekunden, Minuten, Tage, Jahre,...).

Aufgabe 4. Für eine Menge M bezeichne $P(M)$ die Potenzmenge von M. Geben Sie eine injektive Funktion $f : P(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ an. Folgern Sie, daß $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 5. Sei M eine Menge und $L \subseteq M \times M$. Eine Teilmenge X von M ist ein L-Schnitt (genauer: ein linker L-Schnitt), wenn ein $a \in M$ existiert, so daß gilt:

$$X = L_a := \{m \in M \mid (a, m) \in L\}.$$

Die Menge $\Delta_L := \{m \in M \mid (m, m) \in L\}$ ist die L-Diagonale.

(a) (Diagonallemma) Zeigen Sie: Das Komplement der L-Diagonale, das heißt die Menge $M \setminus \Delta_L$, ist kein L-Schnitt.

(b) Sei $f : M \longrightarrow P(M)$. Man setze $L_f := \{(a, b) \in M \times M \mid b \in f(a)\}$. Was ist die Menge der L_f-Schnitte? Was kann man aus dem Diagonallemma für f folgern?

Abgabe: Mittwoch, 29.April, vor der Vorlesung.