Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $S := \{P, R, f, g\}$, wobei P und f zweistellig, R und g einstellig sind. Geben Sie einen termreduzierten S-Ausdruck an, der logisch äquivalent ist zu

$$\forall x\ ((Pg(x)f(x,y) \wedge Rf(x,g(y))) \vee g(g(z)) \equiv f(g(y),g(z)))\ .$$

Aufgabe 2.

(a). Geben Sie eine syntaktische Interpretation I von S_{Grp} in S_{G} an, so daß für alle Gruppen $\mathfrak{A} = (A, \circ)$ gilt: $\mathfrak{A}^{-I} = (A, \circ, ^{-1}, e)$ ist eine Gruppe.

(b). Geben Sie eine syntaktische Interpretation I von S_{Ar} in S_{Ar} an, so daß

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)^{-I}.$$

(*Hinweis:* Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.)

Aufgabe 3.

(a). Sei $S_1 = \{+, \cdot, 0\}$ und $\mathcal{R}_1 = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$. Zeigen Sie, daß die Kleinergleich-Beziehung $\leq$ in $\mathcal{R}_1$ elementar definierbar ist, d.h. daß ein S_1-Ausdruck φ existiert, so daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathcal{R}_1 \models \varphi[a, b]$ genau dann, wenn $a \leq b$.

(b). Sei $S_2 = \{+, 0\}$ und $\mathcal{R}_2 = (\mathbb{R}, +, 0)$. Zeigen Sie, daß die Kleinergleich-Beziehung $\leq$ nicht in $\mathcal{R}_2$ elementar definierbar ist. (*Hinweis:* Arbeiten Sie mit einem geeigneten Automorphismus von $\mathcal{R}_2$.)

Aufgabe 4. Sei S eine Symbolmenge, $P \notin S$ ein einstelliges Relationssymbol und $S^* = S \cup \{P\}$. Zeigen Sie, daß es zu jedem $\varphi \in L_0^S$ ein $\varphi^P \in L_0^{S^*}$ gibt, so daß für alle S-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle S-abgeschlossenen $B \subseteq A$ gilt:

$$[B]^{\mathfrak{A}} \models \varphi \Longleftrightarrow (\mathfrak{A}, B) \models \varphi^P.$$

Hierbei ist $(\mathfrak{A}, B)$ diejenige S^*-Expansion von $\mathfrak{A}$, für die das Symbol P durch B interpretiert wird.

Aufgabe 5. Seien $\Psi \subseteq L_0^{S_1}$ und $\Phi \subseteq L_0^S$. Eine syntaktische Interpretation I von S_1 in S ist eine *Interpretation von* Ψ *in* Φ genau dann, wenn es zu jedem $\mathfrak{A} \models \Psi$ ein $\mathfrak{B} \models \Phi \cup \Phi_I$ gibt mit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^{-I}$.

(a). Zeigen Sie, daß dann für alle $\varphi \in L_0^{S_1}$ gilt:

$$\Psi \models \varphi \iff \Phi \cup \Phi_I \cup \{\chi^I \mid \chi \in \Psi\} \models \varphi^I.$$

(b). Sei $S_1 = \{R\}$ mit dreistelligem R, $S = \{E\}$ mit zweistelligem E, $\Psi = \emptyset$ und $\Phi = \Phi_{\mathrm{Graph}}$. Geben Sie eine Interpretation von Ψ in Φ an.

Abgabe: Mittwoch, 8. Juli, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`