Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 11

Aufgabe 1.

(a). Sei S beliebig. Geben Sie einen L_{II}^{S}-Satz φ an, so daß

$$\mathrm{Mod}(\varphi) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}\ S\text{-Struktur}, A \text{ endlich}, |A| \text{ gerade}\}.$$

(b). Seien X und Y einstellige Relationsvariablen. Geben Sie einen $L_{\mathrm{II}}^{S_{\mathrm{Grp}}}$-Ausdruck $\varphi(X, Y)$ mit freien Variablen X und Y an, so daß für alle Gruppen $\mathfrak{G}$ und alle $M, U \subseteq G$ gilt: $\mathfrak{G} \models \varphi[M, U]$ genau dann, wenn U der Träger der von M erzeugten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.
Hierbei bedeutet $\mathfrak{G} \models \varphi[M, U]$, daß $(\mathfrak{G}, \gamma) \models \varphi$ mit $\gamma(X) = M$ und $\gamma(Y) = U$ gilt.

Aufgabe 2. Für eine Symbolmenge S sei $L_{\mathrm{M\ II}}^{S}$ (die *monadische Sprache der zweiten Stufe*) die Menge der L_{II}^{S}-Ausdrücke, in denen – neben den Zeichen der ersten Stufe – nur einstellige Relationsvariablen auftreten.

(a). Geben Sie einen $L_{\mathrm{M\ II}}^{\{\leq\}}$-Satz φ an, so daß $\mathrm{Mod}(\varphi)$ die Klasse der Wohlordnungen ist.

(b). Geben Sie einen $L_{\mathrm{M\ II}}^{\{R\}}$-Satz φ an, so daß $\mathrm{Mod}(\varphi)$ die Klasse der zusammenhängenden Graphen ist.

(c). Gilt für $L_{\mathrm{M\ II}}^{S}$ das Analogon des Endlichkeitssatzes?

Aufgabe 3. Sei S beliebig. Zeigen Sie, daß zu jedem L_{II}^{S}-Satz ein logisch äquivalenter L_{II}^{S}-Satz existiert, in dem keine Funktionsvariablen vorkommen.

Aufgabe 4. Sei S endlich.

(a). Sei $\varphi \in L_0^S$ fest. Zeigen Sie: Es gibt ein polynomielles Verfahren, welches angesetzt auf die Kodierung einer endlichen Struktur $\mathfrak{A}$, deren Träger die Gestalt $[n]$ für ein geeignetes $n \geq 1$ hat, entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \varphi$. Beschränken Sie sich der Einfachheit halber auf $S = \{R\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol R.

Zur Kodierung: Wir verwenden das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Für die Struktur $\mathfrak{A} = ([n], R^{\mathfrak{A}})$ stehe im Register R_1 das Wort $\underbrace{1 \ldots 1}_{n \text{ mal}}$ und in R_2 das Wort der Länge n^2, an dessen $((i-1) \cdot n + j)$-ter Stelle eine 1 steht, wenn $(i, j) \in R^{\mathfrak{A}}$, und eine 0 sonst. Zum Beispiel steht für $\mathfrak{A} = ([3], \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\})$ in R_2 das Wort 101101001.

Hinweis: Führen Sie den Beweis durch Induktion über den Aufbau von φ, wobei zunächst die zu zeigende Aussage durch eine für solche Induktionen geeignete Aussage über Ausdrücke ersetzt wird.

(b). Sei $\varphi = \exists X_1 \ldots \exists X_m \psi$ ein fester L_{II}^S-Satz, wobei $X_1, \ldots, X_m$ Relationsvariablen beliebiger Stellenzahl sind und ψ keine Quantoren zweiter Stufe enthält. Zeigen Sie: Es gibt ein NPTIME-Verfahren, welches angesetzt auf die Kodierung einer endlichen Struktur $\mathfrak{A}$, deren Träger die Gestalt $[n]$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ hat, entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Aufgabe 5. Wir setzen voraus, daß ZFC widerspruchsfrei ist. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ sei c_r ein neues Konstantensymbol, so daß $c_r \neq c_s$ für $r \neq s$. Zeigen Sie, daß die folgende Satzmenge erfüllbar ist:

$$\text{ZFC} \cup \{\neg\, c_r \equiv c_s \mid r, s \in \mathbb{R},\ r \neq s\} \cup \{c_r \underline{\in} \underline{\omega} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Es gibt also ein Modell der Mengenlehre, in dem es überabzählbar viele natürliche Zahlen gibt. Erklären Sie diesen scheinbaren Widerspruch.

Abgabe: Mittwoch, 15. Juli, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`