Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie ein R-Programm P an, welches die Identität auf Σ^* berechnet, das heißt mit $P : x \mapsto x$ für alle $x \in \Sigma^*$.

Aufgabe 2. Sei Σ ein Alphabet und $W \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, daß W genau dann R-entscheidbar ist, wenn es ein Aufzählungsverfahren P für W gibt, welches die Elemente von W ohne Wiederholungen in lexikographischer Reihenfolge ausgibt.

Aufgabe 3. Sei Σ ein Alphabet und $W \subseteq \Sigma^*$ eine nichtleere Wortmenge über Σ. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. W ist R-aufzählbar.
2. Es gibt eine berechenbare Funktion f mit $\mathrm{df}(f) = W$ und $\mathrm{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$.
3. Es gibt eine berechenbare Funktion f mit $\mathrm{df}(f) = \Sigma^*$ und $\mathrm{bd}(f) = W$.

Aufgabe 4. Seien Σ_1 und Σ_2 Alphabete und $W_1 \subseteq \Sigma_1^*, W_2 \subseteq \Sigma_2^*$. Die Wortmenge W_1 heißt *auf* W_2 *(many-one) reduzierbar* (in Notation $W_1 \leq_m W_2$), wenn es eine R-berechenbare Abbildung $f : \Sigma_1^* \longrightarrow \Sigma_2^*$ gibt, so daß für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt:

$$x \in W_1 \Longleftrightarrow f(x) \in W_2.$$

Ein solches f ist eine *Reduktion von* W_1 *auf* W_2. Zeigen Sie:

1. Ist $W_1 \leq_m W_2$ und W_2 R-entscheidbar, so ist auch W_1 R-entscheidbar.
2. Ist $W_1 \leq_m W_2$ und W_2 R-aufzählbar, so ist auch W_1 R-aufzählbarr.

Wurde in der Vorlesung bereits eine Reduktion (implizit) angegeben?

Aufgabe 5. Sei $\Sigma = \{|\}$. Wie üblich identifizieren wir Σ^* mit $\mathbb{N}$. Sei weiterhin f eine Funktion mit $\mathrm{df}(f) \subseteq (\Sigma^*)^2$ und $\mathrm{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$. Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$g_1(x) = \begin{cases} \text{das kleinste } y \text{ mit } f(x,y) = 0, & \text{falls ein solches } y \text{ existiert} \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \begin{array}{c} \text{das kleinste } y \text{ mit } f(x,y) = 0 \\ \text{und } f(x,z) \text{ ist definiert für } z < y, \end{array} & \text{falls ein solches } y \text{ existiert} \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist stets für berechenbares f auch g_1 berechenbar? Ist stets für berechenbares f auch g_2 berechenbar? Warum?

Abgabe: Mittwoch, 6. Mai, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`