Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 3

Aufgabe 1.
(a) Sei $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_m\}$. Zu $W \subseteq \Sigma^*$ sei

$$\chi_W : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* \text{ mit } \chi_W(x) = \begin{cases} \lambda & , x \in W \\ a_0 & , x \notin W \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion von* W. Zeigen Sie, daß W genau dann R-entscheidbar ist, wenn χ_W berechenbar ist.

(b) Für eine Funktion f mit $\mathrm{df}(f), \mathrm{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$ sei

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{df}(f)\}$$

der *Graph von* f. Zeigen Sie, daß G_f genau dann R-aufzählbar ist, wenn f berechenbar ist.

Aufgabe 2. Sei $\Pi_\lambda := \{x_P \mid P \text{ angesetzt auf } \lambda \text{ druckt irgendwann } \lambda \text{ aus}\}$. Zeigen Sie, daß Π_λ nicht R-entscheidbar ist.

Aufgabe 3. Seien die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(n) &:= \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ gerade} \\ 3n+1 & , n \text{ ungerade} \end{cases} \\ g(n) &:= \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n = 0 \\ 1 & , \text{ falls } f^k(n) = 1 \text{ für ein } k \geq 1 \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei ist $f^1 := f$ und $f^{\ell+1} := f \circ f^\ell$.

1. Ist g berechenbar?
2. Ist g total? (vermutlich **sehr** schwierig)
3. (Freiwillig:) Berechnen Sie für $n \in \{15, 31, 85\}$ das kleinste k mit $f^k(n) = 1$. Den Rechenweg brauchen Sie nicht mit abzugeben.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen μ-rekursiv sind. Geben Sie dazu jeweils an, wie diese Funktionen aus den Ausgangsfunktionen durch die entsprechenden Prozesse gewonnen werden können.

1. Die Funktion $c_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $c_3(n) := 3$.
2. Die Addition $\oplus : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\oplus(n, m) := n + m$.
3. Die modifizierte Differenz $\ominus : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\ominus(n, m) := \max\{0, n - m\}$.

Aufgabe 5. Seien Σ und Π Alphabete und $V \subseteq (\Sigma^*)^r, W \subseteq (\Pi^*)^s$ mit $r, s \geq 1$. V heißt *auf W polynomiell reduzierbar* ($V \leq_p W$) genau dann, wenn es PTIME-Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ von $(\Sigma^*)^r$ nach Π^* gibt, so daß für alle r-Tupel $\bar{x} \in (\Sigma^*)^r$ gilt:

$$\bar{x} \in V \iff (f_1(\bar{x}), \ldots, f_s(\bar{x})) \in W.$$

Sei Γ ein weiteres Alphabet und $U \subseteq (\Gamma^*)^t$ für $t \geq 1$. Zeigen Sie:

1. Ist $U \leq_p V$ und $V \leq_p W$, so ist $U \leq_p W$.
2. Ist $V \leq_p W$ und $W \in$ PTIME, so ist $V \in$ PTIME.
3. Ist $V \leq_p W$ und $W \in$ NPTIME, so ist $V \in$ NPTIME.

$W \subseteq (\Pi^*)^s$ heißt NP-vollständig genau dann, wenn $W \in$ NPTIME und für alle $V \in$ NPTIME gilt $V \leq_p W$. Folgern Sie:

$$\text{PTIME} = \text{NPTIME} \iff W \in \text{PTIME}.$$

Abgabe: Mittwoch, 13. Mai, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`