Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $S = \{P, R, f, g, c, d\}$ eine Symbolmenge, wobei P und g zweistellig, R und f einstellig sind.

1. Welche der folgenden Zeichenreihen sind S-Terme?

$$g(f(c), g(v_2, d)) \quad f(g(v_1), d) \quad g(v_7, f(g\ c, d))$$

2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind S-Ausdrücke?

$$\exists v_1 \forall v_2 R v_1 \quad \forall v_7(\neg P(f(v_7), v_7) \wedge R(d)) \quad \forall c P cc \quad \exists v_3 \forall v_3 (P v_3 v_2 \vee R v_2)$$

Aufgabe 2. Sei $S = \{P, U, <, d\}$ für ein zweistelliges $<$ und einstellige P, U. Es sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, P^{\mathfrak{N}}, U^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}}, d^{\mathfrak{N}})$, wobei $P^{\mathfrak{N}}$ die Menge der Primzahlen ist, $U^{\mathfrak{N}}$ die Menge der ungeraden Zahlen, $<^{\mathfrak{N}}$ die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ und $d^{\mathfrak{N}} = 3$. Symbolisieren Sie:

1. Nicht alle natürlichen Zahlen sind prim.
2. Es gibt eine von 3 verschiedene Primzahl.
3. Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.
4. Es gibt genau eine gerade Primzahl.
5. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
6. Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.
7. Nicht jede natürliche Zahl größer 3 ist prim.
8. Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge. ((p, q) ist ein *Primzahlzwilling* genau dann, wenn $q - p = 2$ und p und q sind prim.)

Aufgabe 3.

Are we not drawn onward, we few, drawn onward to new era

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für ein Wort $w = a_1 \dots a_{|w|} \in \Sigma^*$ sei $w^{-1} := a_{|w|} \dots a_1$. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist ein *Palindrom* genau dann, wenn $w = w^{-1}$. Geben Sie ein nichtdeterministisches R-Programm an, welches die Menge der Palindrome in Σ^* entscheidet.

Aufgabe 4. Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, daß es ein *universelles Programm* gibt, das ist ein Programm P_0, so daß für alle R-Programme P und alle $y, z \in \Sigma^*$ gilt:

$$P_0 : (x_P, y) \to \text{halt} \iff P : y \to \text{halt}$$
$$P_0 : (x_P, y) \to z \iff P : y \to z$$

Folgern Sie, daß nicht entscheidbar ist, ob P_0 angesetzt auf (x, y) schließlich hält.

Aufgabe 5. "An jeder Stelle in einem Term, an der kein Hilfssymbol steht, beginnt genau ein Term."

Genauer: Sei S eine Symbolmenge und $t \in T^S$; sei $t = uav$ für $u, v \in \Sigma_S^*$ und einen Buchstaben $a \in \Sigma_S$ verschieden von den Klammern (,) und dem Komma , . Zeigen Sie, daß es genau einen Term $t' \in T^S$ gibt, so daß $t = ut'v'$ für ein geeignetes $v' \in \Sigma_S^*$.

Abgabe: Mittwoch, 20. Mai, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter

`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`