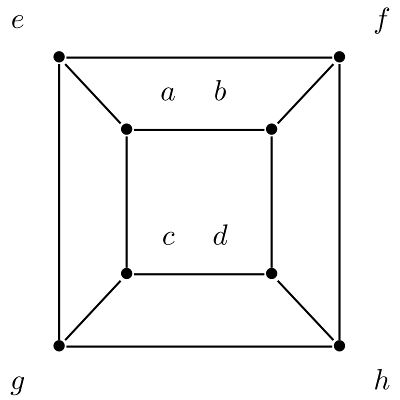
Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

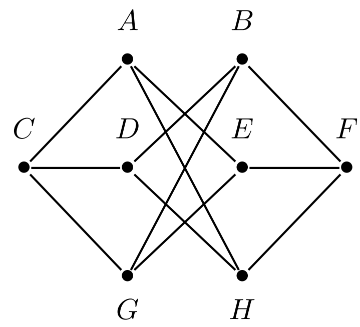
SS 2009, Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $S := \{E\}$ mit zweistelligem E; $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien die Graphen:

$\mathfrak{G}_1$



$\mathfrak{G}_2$



1. Die Graphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sind isomorph. Geben Sie einen Isomorphismus an.

2. Prüfen Sie, ob $\mathfrak{G}_i \models \varphi_j$ für $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2,3\}$, wobei

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)\\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (\neg Exy \rightarrow \exists z (Exz \wedge Ezy))\\
\varphi_3 &:= \forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 (Exy_1 \wedge Exy_2 \wedge Exy_3 \wedge Exy_4).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei S eine Symbolmenge, $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur mit Träger B, und $M \subseteq B$. Gelte weiterhin

$$M \neq \emptyset \text{ oder } S \text{ enthält ein Konstantensymbol.}$$

Zeigen Sie, daß die Menge

$$X := \{t^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_n] \mid n \geq 0,\ a_1, \ldots, a_n \in M,\ t \in T_n^S\}$$

Träger einer Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist, d.h. daß es eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $A = X$ gibt.

Aufgabe 3. Sei $S := \{+, \cdot, 0, 1, \leq, f, d\}$, wobei die Funktionssymbole f und d ein- und zweistellig sind. Sei $\mathfrak{R}$ eine S-Struktur mit Träger $\mathbb{R}$, in der $+, \cdot, 0, 1$ und $\leq$ wie üblich interpretiert sind, $f^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $d^{\mathfrak{R}}$ die Abstandsfunktion ist, d.h. $d^{\mathfrak{R}}(r, r') = |r - r'|$ für alle $r, r' \in \mathbb{R}$. Symbolisieren Sie:

1. $f^{\mathfrak{R}}$ ist gleichmässig stetig.

2. Wenn $f^{\mathfrak{R}}$ streng monoton ist, dann ist $f^{\mathfrak{R}}$ injektiv.

3. $f^{\mathfrak{R}}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 4. Für eine Menge M seien

$$\begin{aligned} P_e(M) &:= \{Y \subseteq M \mid Y \text{ ist endlich } \} \\ P_{e,ce}(M) &:= \{Y \subseteq M \mid Y \text{ ist endlich oder } M \smallsetminus Y \text{ ist endlich}\} \end{aligned}$$

1. Ist $P_e(M)$ Träger einer Substruktur der Booleschen Algebra $P(M)$ und damit selbst eine Boolesche Algebra?

2. Is $P_{e,ce}(M)$ Träger einer Substruktur der Booleschen Algebra $P(M)$ und damit selbst eine Boolesche Algebra?

Aufgabe 5. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Mengen V_n und $\overline{n}$ induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} V_0 &:= \emptyset, & \overline{0} &:= \emptyset, \\ V_{n+1} &:= P(V_n), & \overline{n+1} &:= \overline{n} \cup \{\overline{n}\}. \end{aligned}$$

Weiter sei $V_{\mathbb{N}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Zeigen Sie:

1. V_n ist endlich.

2. $V_n \subseteq V_m$ für $n < m$.

3. Aus $x \in V_n$ folgt $x \subseteq V_n$.

4. Aus $x \in V_{\mathbb{N}}$ folgt $x \subseteq V_{\mathbb{N}}$.

5. $\overline{n} \in V_{n+1} \smallsetminus V_n$.

6. $V_{\mathbb{N}}$ ist abzählbar.

Geben Sie $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ und $\overline{3}$ explizit an.

Abgabe: Mittwoch, 10. Juni, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`