Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 7

Aufgabe 1.

1. Sei $\varphi \in L^S$. Geben sie den Ausdruck $\exists^{\leq 3} x\, \varphi$ explizit an.
2. Geben Sie einen zu $(\forall x(\exists y Rxy \vee \forall y Ryx) \rightarrow \exists z(\exists x Rxz \wedge \forall y Ryz))$ äquivalenten Ausdruck in pränexer Normalform an.

Aufgabe 2. (1) Welche der folgenden Sequenzen sind korrekt?

1. $\forall x\varphi \quad \exists x\varphi$
2. $\varphi \quad \psi \quad (\varphi \wedge \forall x\psi)$

(2) Welche der folgenden Regeln sind korrekt?

1. $\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & & (\neg\varphi \vee \chi) \end{array}$

2. $\begin{array}{ll} \Gamma & \exists x\varphi \\ \hline \Gamma & \forall x\varphi \end{array}$

Aufgabe 3. Berechnen Sie $\left[[\forall v_2 f(v_2, v_3) \equiv v_1]\frac{v_2}{v_1}\right]\frac{f(v_3, v_1)}{v_2}$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche S-Struktur. Zeigen Sie:

1. Ist S endlich, so gibt es einen Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$, der $\mathfrak{A}$ charakterisiert, d.h. mit $\mathrm{Mod}(\varphi_{\mathfrak{A}}) = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$.

2. Ist S beliebig, so gibt es eine Satzmenge $\Phi_{\mathfrak{A}}$, die $\mathfrak{A}$ charakterisiert, d.h. mit $\mathrm{Mod}(\Phi_{\mathfrak{A}}) = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$.

Aufgabe 5. Seien V_n und $V_{\mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 5 auf Blatt 6 definiert. Sei $\underline{\varepsilon}$ ein zweistelliges Relationssymbol und

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^{V_n} &= \{(x,y) \mid x,y \in V_n,\ x \in y\} \\ \underline{\varepsilon}^{V_{\mathbb{N}}} &= \{(x,y) \mid x,y \in V_{\mathbb{N}},\ x \in y\} \end{aligned}$$

(1) Gilt $(V_5, \underline{\varepsilon}^{V_5}) \models \varphi,\ (V_{\mathbb{N}}, \underline{\varepsilon}^{V_{\mathbb{N}}}) \models \varphi$ für folgende Aussagen φ?

(EXT)	$\varphi = \forall x \forall y\, (\forall z (\underline{\varepsilon} zx \leftrightarrow \underline{\varepsilon} zy) \rightarrow x \equiv y)$
(PAAR)	$\varphi = \forall x \forall y \exists z \forall w\, (\underline{\varepsilon} wz \leftrightarrow (w \equiv x \vee w \equiv y))$
(POT)	$\varphi = \forall x \exists y \forall z\, (\underline{\varepsilon} zy \leftrightarrow \forall w (\underline{\varepsilon} wz \rightarrow \underline{\varepsilon} wx))$
(AUS)	$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \exists y \forall z\, (\underline{\varepsilon} zy \leftrightarrow (\underline{\varepsilon} zx \wedge \psi(z, x_1, \ldots, x_n)))$ für $\psi(z, x_1, \ldots, x_n)$ beliebig

(2) Sei $A := \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $0^{\mathcal{A}} := \overline{0}$ und $\sigma^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ sei definiert durch $\sigma^{\mathcal{A}}(\overline{n}) := \overline{n+1}$. Zeigen Sie, daß die Struktur $\mathcal{A} = (A, \sigma^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ die Peanoaxiome (P1) bis (P3) erfüllt.

Abgabe: Mittwoch, 17. Juni, vor der Vorlesung.
Hinweis: Da am Donnerstag, 11.6. ein Feiertag ist, werden die Donnerstagsübungen verschoben auf Freitag, 12.6., 14 Uhr in Raum 119 (Magnus) bzw. Raum 318 (Leander).
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`