Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2009, Blatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie für jede Symbolmenge S, daß die Klasse der unendlichen S-Strukturen in der ersten Stufe axiomatisierbar ist, aber nicht endlich axiomatisierbar.

Aufgabe 2. Eine Ordnung $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$ ist eine *Wohlordnung* genau dann, wenn jede nicht leere Teilmenge $X \subseteq A$ ein Minimum hat, d.h.: für alle $X \subseteq A$ mit $X \neq \emptyset$ gibt es ein $a \in X$, so daß für alle $b \in X$ gilt: $a \leq^{\mathfrak{A}} b$.

(a). Welche der folgenden Ordnungen sind Wohlordungen?

$$(\mathbb{N}, \leq^{\mathfrak{N}}),\ (\mathbb{Z}, \leq^{\mathfrak{Z}}),\ (\mathbb{R}, \leq^{\mathfrak{R}})$$

Hierbei sind $\leq^{\mathfrak{N}}, \leq^{\mathfrak{Z}}, \leq^{\mathfrak{R}}$ jeweils die natürlichen Ordnungsrelationen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$.

(b). Sei $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$ eine Ordnung. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathfrak{A}$ ist eine Wohlordnung

(ii) Es gibt keine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise verschiedener Elemente von A mit

$$\ldots \leq^{\mathfrak{A}} a_3 \leq^{\mathfrak{A}} a_2 \leq^{\mathfrak{A}} a_1.$$

(c). Zeigen Sie, daß die Klasse der Wohlordnungen nicht in der ersten Stufe axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

(a). Ein Tupel $(a_0, \ldots, a_n) \in G^{n+1}$ ist ein *Weg in* $\mathfrak{G}$ gdw. für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $(a_{i-1}, a_i) \in E^{\mathfrak{G}}$. $(a_0, \ldots, a_n)$ ist dann ein *Weg der Länge* n *von* a_0 *nach* a_n *in* $\mathfrak{G}$. Geben Sie für $n \geq 1$ einen $\{E\}$-Ausdruck $\varphi_n(x, y)$ an, so daß für alle $a, b \in G$ gilt:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_n[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{es gibt einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b \\ \text{in } \mathfrak{G}\text{, aber keinen der Länge } n-1.\end{array}$$

(b). $\mathfrak{G}$ heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b in $\mathfrak{G}$ gibt. Zeigen Sie, daß die Klasse der zusammenhängenden Graphen nicht in der ersten Stufe axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph. $\mathfrak{G}$ heißt *azyklisch* genau dann, wenn er keine Zykel hat. *Zykel* in $\mathfrak{G}$ sind Wege $(a_0, \ldots, a_n)$ in $\mathfrak{G}$ (siehe Aufgabe 3) mit $n \geq 2$ und paarweise verschiedenen a_i, so daß $(a_n, a_0) \in E^{\mathfrak{G}}$. Zeigen Sie, daß die Klasse der azyklischen Graphen in der ersten Stufe axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 5. Sei $S = \{0, f\}$ für ein Konstantensymbol 0 und ein einstelliges Funktionssymbol f. Weiter sei

$$\begin{aligned}\Phi \quad = \quad & \{\forall x \, \neg f(x) \equiv 0 \;, \\ & \forall x \, (x \equiv 0 \vee \exists y \, x \equiv f(y)) \;, \\ & \forall x \forall y \, (f(x) \equiv f(y) \rightarrow x \equiv y)\}.\end{aligned}$$

Geben sie drei paarweise nicht isomorphe, abzählbare Modelle von Φ an.

Abgabe: Mittwoch, 1. Juli, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter und die Einteilung der Übungen findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/logik09/logik09.html`