Übungen zur Vorlesung “Mengenlehre”
WS 2009/2010, Blatt 1

Aufgabe 1: Eine Menge A ist *transitiv*, wenn $x \subseteq A$ für alle $x \in A$ (wenn also aus $x \in A$ und $y \in x$ sich $y \in A$ ergibt). Man zeige:

a) $\emptyset$ ist transitiv.

b) Ist x transitiv und $y \subseteq x$, so ist $x \cup \{y\}$ transitiv. Insbesondere ist $x \cup \{x\}$ transitiv.

c) Sind x und y transitiv, so auch $x \cap y$ und $x \cup y$; allgemeiner: Ist A eine nicht leere Menge von transitiven Mengen, so sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv.

Aufgabe 2: Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ bezeichne $[n]_d$ die Darstellung von n zur Basis d.

$$[23]_2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0, \quad [23]_3 = 2 \cdot 3^2 + 3^1 + 2 \cdot 3^0, \quad [23]_4 = 4^2 + 4^1 + 3 \cdot 4^0$$

Ersetzt man in ihr in den Exponenten, Exponenten von Exponenten,... alle Zahlen größer als d, wiederum durch durch ihre Darstellung zur Basis d, so erhält man schließlich die *Superdarstellung* $[[n]]_d$ *von* n *zur Basis* d, also etwa

$$[[23]]_2 = 2^{2^2} + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Oder etwa

$$[266]_2 = 2^8 + 2^3 + 2^1 \qquad \text{und} \qquad [[266]]_2 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $d \geq 2$ sei $G(d,n) \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

- Wenn $n = 0$, so $G(d,n) = 0$.
- Wenn $n \geq 1$, so erhält man $G(d,n)$ in dem man in der Superdarstellung $[[n]]_d$ von n zur Basis d alle vorkommenden d durch $d+1$ ersetzt und von der dadurch resultierenden Zahl 1 subtrahiert.

Somit

$$G(2,23) = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1 + 3^0 - 1 = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1$$
$$G(2,266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \cdot 3^0.$$

Für $n \geq 1$, definiert man nun die Folge

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

wie folgt:

- $n_1 := n$
- $n_{\ell+1} := G(\ell+1, n_\ell)$,

also

$$n_1 = n, \quad n_2 = G(2, n_1), \quad n_3 = G(3, n_2), \ldots$$

So erhalten wir für $n = 266$

$$\begin{array}{rcl}
266_1 & = & 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\
266_2 & = & 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \cdot 3^0 \\
266_3 & = & 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 \cdot 4^0 - 1 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \cdot 4^0 \\
266_4 & = & 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 \cdot 5^0 - 1 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Man zeige: Für alle $n \geq 1$ gibt es ein $\ell \geq 1$ mit $n_\ell = 0$.

Abgabe: Mittwoch, 28.Oktober, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/ml0910/ml0910.html`