Übungen zur Vorlesung "Mengenlehre"

WS 2009/2010, Blatt 10

Aufgabe 21: Die Addition von Ordinalzahlen bezeichnen wir hier mit $\oplus$. Wir erinnern an die Definition (die bereits in 4.15 gegeben wurde):

$$\alpha \oplus \beta \;=\; \mathrm{wo}\big((\alpha, \in_\alpha) + (\beta, \in_\beta)\big).$$

Man zeige den Satz über die ordinale Addition (vgl. auch Blatt 7, Aufgabe 14):

a) Die ordinale Addition ist assoziativ (jedoch nicht kommutativ, da etwa $1 \oplus \omega \neq \omega \oplus 1$).

b) $\forall \alpha: \quad \alpha \oplus 0 = \alpha = 0 \oplus \alpha$.

c) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$: (wenn $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$, so $\beta = \gamma$) (jedoch $1 \oplus \omega = 0 \oplus \omega$).

d) Für alle α, β mit $\alpha \leq \beta$ gibt es genau ein γ mit $\alpha \oplus \gamma = \beta$ (jedoch ist die Gleichung $x \oplus \omega = \aleph_1$ nicht lösbar).

e) Für jedes α und jede Menge a von Ordinalzahlen gilt:

$$\alpha \oplus \sup a = \sup\{\alpha \oplus \beta \mid \beta \in a\}$$

(jedoch $\sup \omega \oplus \omega \neq \sup\{i \oplus \omega \mid i \in \omega\}$).

Man folgere: $\oplus$ kann auch über die folgenden Gleichungen definiert werden.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus 0 &:= \alpha \\ \alpha \oplus (\beta + 1) &:= (\alpha \oplus \beta) + 1 \\ \text{wenn Lim } \gamma\text{, so} \qquad \alpha \oplus \gamma &:= \bigcup\{\alpha \oplus \beta \mid \beta < \gamma\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 22: Man zeige: $\forall \alpha \; \exists \beta : \quad \big(\alpha \leq \beta \text{ und } \aleph_\beta = \beta\big)$.

Abgabe: Mittwoch, 27. Januar, vor der Vorlesung.
Es wäre schön, wenn Sie beide Aufgaben bearbeiten würden.
Die Übungsblätter findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/ml0910/ml0910.html`