Übungen zur Vorlesung "Mengenlehre"

WS 2009/2010, Blatt 12

Aufgabe 24: Man berechne die ω-adische Darstellung von $\aleph_1$.

Aufgabe 25: Gilt stets für Ordinalzahlen α, β, γ

$$\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma?$$

Aufgabe 26: Sei x eine Menge von Teilmengen von $\mathbb{R}$, also $x \subseteq P(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$x^+ := \{\mathbb{R} \setminus y \mid y \in x\} \cup \{y \cap z \mid y, z \in x\} \cup \{\bigcup y \mid y \subseteq x,\ |y| \leq \aleph_0\}.$$

Ausgehend von x definiere man x_α durch transfinite Induktion

$$\begin{array}{rrcl} & x_0 & := & x \\ & x_{\alpha+1} & := & (x_\alpha)^+ \\ \text{wenn Lim } \gamma, \text{ so} & x_\gamma & := & \bigcup\{x_\alpha \mid \alpha < \gamma\}. \end{array}$$

Man zeige:

a) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$: wenn $\alpha \leq \beta$, so $x_\alpha \subseteq x_\beta$;

b) $\bigcup\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\} = x_{\aleph_1}$.

Ist x die Menge der offenen Mengen, so ist $\bigcup\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ die *σ-Algebra der Borelmengen*. Man kann für jede Borelmenge y zeigen, dass ($|y| \leq \aleph_0$ oder $|y| = 2^{\aleph_0}$) gilt.

Abgabe: Mittwoch, 10. Februar, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter findet man auch unter
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/bjoern/lehre/ml0910/ml0910.html`