Blatt 1

Abgabe am 30.4.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1. Sei X eine nicht leere Menge und sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften:

a) Für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

b) Für jede Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

c) $\emptyset$ und X sind in $\mathcal{A}$.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

i) Gibt es eine Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ auf X, sodass die abgeschlossenen Mengen von $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ genau die Mengen aus $\mathcal{A}$ sind?

ii) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Welche der drei Eigenschaften $a), b)$ und $c)$ werden von den abgeschlossenen Mengen von $\mathcal{O}$ erfüllt?

Definiton. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls eine Injektion $f : A \to \mathbb{N}$ existiert.

Aufgabe 2. Sei $X = \mathbb{N}$.

i) Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq X : A \text{ ist endlich oder ganz } X\}$. Gibt es eine Topologie, deren abgeschlossene Mengen genau das Mengensystem $\mathcal{A}_1$ ergibt?

ii) Erhalten wir auch eine Topologie für $\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq X \ : \ A \text{ ist abzählbar oder ganz } X\}$?

iii) Erhalten wir auch eine Topologie für $\mathcal{A}_3 := \{A \subseteq X \ : \ A \text{ ist unendlich oder ganz } X\}$?

Aufgabe 3.

i) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Gilt dann

$$\bar{A} = \bigcap \{C \subseteq X \ : \ A \subseteq C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen}\}?$$

ii) Geben Sie alle möglichen Topologien für $X = \{a, b\}$ an.

Aufgabe 4. Sei $\tilde{\ } : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\tilde{\emptyset} = \emptyset$,

ii) $\forall A \subseteq X$ ist $A \subseteq \tilde{A}$,

iii) $\forall A \subseteq X$ ist $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$,

iv) $\forall A, B \subseteq X$ ist $(\widetilde{A \cup B}) = \tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Zeigen Sie, dass auf X eine eindeutig bestimmte Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$ existiert, sodass $\tilde{A} = \bar{A}$ für alle $A \subseteq X$ gilt, wobei $\bar{A}$ den topologische Abschluss von A bzgl $\tilde{\mathcal{O}}$ bezeichnet.