Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 3

Abgabe am 14.05.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1. Beantworten Sie die Fragen mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

i) Seien X_i topologische Räume für $i \in I$ und $X = \prod_i X_i$ ausgestattet mit der Produkttopologie. Sind die Projektionsabbildungen $p_i : X \to X_i$ definiert durch $p_i(x) = x_i$, offen?

ii) Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ surjektiv. Die von f erzeugte Finaltopologie auf Y ist

$$\mathscr{O}_{Y,f} := \{A \subseteq Y \ : \ f^{-1}[A] \in \mathscr{O}_X\}.$$

Ist $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_{Y,f})$ offen?

iii) Sei X eine Menge, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ topologischer Raum und $f : X \to Y$ surjektiv. Die von f erzeugte Initialtopologie auf X ist

$$\mathscr{O}_{X,f} := \{f^{-1}[A] \ : \ A \in \mathscr{O}_Y\}.$$

Ist $f : (X, \mathscr{O}_{X,f}) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ offen?

Aufgabe 2. Seien (X_n, d_n) metrische Räume für $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Metrik d auf $\prod_n X_n$, sodass $\mathscr{O}(d)$ mit der Produkttopologie übereinstimmt?

Aufgabe 3. Seien X_i topologische Räume für $i \in I$ und $A_i \subseteq X_i$ Teilmengen. Sei $X = \prod_i X_i$ mit der Produkttopologie ausgestattet.

1. Gilt $(\prod_i A_i)^\circ \subseteq \prod_i \mathring{A}_i$?
2. Gibt es ein Beispiel für $(\prod_i A_i)^\circ \subsetneq \prod_i \mathring{A}_i$?

Aufgabe 4. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mögen als Bildraum aufgefasst die Standardtopologie $\mathscr{O}_<$ tragen und als Urbildraum zunächst keine Topologie tragen. Geben Sie eine Indexmenge I zusammen mit einer Familie von Funktionen $(f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{i \in I}$ an, sodass die von $(f_i, \mathbb{R}, \mathscr{O}_<)_{i \in I}$ bestimmte Initialtopologie auf $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie übereinstimmt.

Bonus-Aufgabe (Die Boxtopologie)**.** Seien X_i topologische Räume für $i \in I$.

1. Zeigen Sie, dass $\{\prod_i U_i \ : \ U_i \subseteq X_i \text{ offen}\}$ eine Basis einer Topologie ist.
2. Wir statten das Produkt $\prod_i X_i$ mit der Topologie von 1. aus. Seien $A_i \subseteq X_i$ Teilmengen. Gilt dann $(\prod_i A_i)^\circ \subseteq \prod_i \mathring{A}_i$?
3. Gibt es ein Beispiel für $(\prod_i A_i)^\circ \subsetneq \prod_i \mathring{A}_i$?