Blatt 6

Abgabe am 04.06.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Menge eine G_δ Menge ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

a) Seien X, Y topologische Räume, $h : X \to Y$ ein Homöomorphismus und $x \in X$. Wir definieren $\tilde{h} : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{h(x)\}$ durch $\tilde{h}(z) = h(z)$ für alle $z \in X \setminus \{x\}$. Ist dann $\tilde{h}$ immer noch ein Homöomorphismus?

b) Wir definieren die Kreislinie $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch:

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sind S^1 und das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ homöomorph?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei X ein T_4-Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und die Projektion $p : X \to X/_\sim$, definiert durch $p(x) = [x]_\sim$, sei abgeschlossen. Zeigen Sie, dass dann der Quotient $X/_\sim$ auch ein T_4-Raum ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Ein *komplexes Polynom* ist eine Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ der folgenden Gestalt. Es gibt $k_1 \ldots k_n \in \mathbb{N}$ und $a_{i_1,\ldots i_n} \in \mathbb{C}$, so dass für alle $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}.$$

Sie können ohne Beweis annehmen: Wenn für ein komplexes Polynom $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine nicht leere offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ existiert, auf der f konstant 0 ist, so gilt schon $f[\mathbb{C}^n] = \{0\}$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-abgeschlossen*, falls es eine Menge $\mathcal{P}$ von komplexes Polynomen gibt, so dass

$$A = N(\mathcal{P}) := \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ \forall f \in \mathcal{P}\ (f(z) = 0)\}$$

gilt. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen*, falls $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist.

a) Zeigen Sie, dass das System der Zariski-offenen Mengen eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$ bildet.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ Zariski-offen und nicht leer. Gilt dann

   i) U ist offen in $\mathbb{C}^n$ bzgl. der üblichen Topologie auf $\mathbb{C}^n$?

   ii) U liegt dicht in $\mathbb{C}^n$ bzgl. der üblichen Topologie auf $\mathbb{C}^n$?

c) Ist $\mathbb{C}^n$ zusammen mit der Zariski-Topologie ein T_1-Raum?

d) Ist $\mathbb{C}^n$ zusammen mit der Zariski-Topologie ein T_2-Raum?

Bitte wenden.

Bonus-Aufgabe (4 Punkte)**.** Wir statten $S := [0,1] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Unterraumtopologie aus. Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - f(x_1) = y_2 - f(x_2) & \text{falls } x_1, x_2 \in (-1,1) \\ x_1 = x_2 & \text{falls } x_1, x_2 \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S definiert.

b) Ist $S/_\sim$ zusammen mit der Quotiententopologie ein T_1- oder sogar ein T_2-Raum?