Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 7

Abgabe am 18.06.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

a) Bestimmen Sie alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ in der kofiniten Topologie.

b) Sei $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ der Raum der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Topologie der Metrik $d((x_n)(y_n)) := \sup\{|x_n - y_n| \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Geben Sie eine Folge an, die keinen Häufungspunkt hat.

c) Gibt es auch eine Cauchyfolge bzgl. der Metrik d, die keinen Häufungspunkt hat?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei X ein Hausdorff-Raum, der eine abzählbare Basis hat. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

a) X ist kompakt.

b) Jede abzählbare, offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

c) Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.

d) Jede Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien X ein topologischer Raum und Y ein kompakter Hausdorff-Raum.

a) Beweisen Sie: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph

$$G_f := \{(x, f(x)) \,:\, x \in X\} \subseteq X \times Y$$

eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums $X \times Y$ ist.
Hinweis: Es könnte nützlich sein zu zeigen, dass $f^{-1}[V] \subseteq X$ offen ist, falls jedes $x \in f^{-1}[V]$ eine Umgebung $W \subseteq X$ hat, so dass $(W \times (Y \setminus V)) \cap G_f = \emptyset$.

b) Geben Sie für jede Richtung der Äquivalenz gegebenenfalls Gegenbeispiele für den Fall an, dass man eine der Voraussetzungen an Y weglässt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Ein topologischer Raum X heißt *lokalkompakt*, falls X hausdorffsch ist und es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \in \mathscr{U}(x)$ und eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt, so dass $x \in U \subseteq K$.

Vorsicht: Es ist üblich, die Hausdorff-Eigenschaft zur Lokalkompaktheit hinzuzunehmen.

a) Ist jeder lokalkompakte Raum X regulär?

b) Sei X lokalkompakt. Gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder offenen Umgebung $U \in \mathscr{U}(x)$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathscr{U}(x)$, so dass $x \in K \subseteq U$?

Bitte wenden.

Definiton. Seien X, Y topologische Räume und $C(X, Y)$ bezeichne die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Zu einer kompakten Menge $K \subseteq X$ und einer offenen Menge $O \subseteq Y$ definieren wir

$$U(K, O) := \{f \in C(X, Y) \,:\, f[K] \subseteq O\}.$$

Die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X, Y)$ ist die von der Subbasis

$$\mathscr{S} := \{U(K, O) \,:\, K \subseteq X \text{ kompakt}, O \subseteq Y \text{ offen}\}$$

erzeugte Topologie.

Bonus-Aufgabe (8 Punkte)**.** Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie:

a) Ist Y ein Hausdorff-Raum, so ist $C(X, Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie ein Hausdorff-Raum.

b) Ist X lokalkompakt, so ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X, Y) \times X \to Y$, $\varepsilon(f, x) = f(x)$ stetig.

c) Nun seien $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$, $(Z, \mathscr{O}_Z)$ topologische Räume. Die Mengen $C(Y, Z)$, $C(X \times Y, Z)$, $C(X, C(Y, Z))$ seien mit der jeweiligen kompakt-offenen Topologie ausgestattet.

   Wir definieren die kanonische Abbildung $\mathrm{h_{kan}}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{h_{kan}} \colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z)) \\ &\mathrm{h_{kan}}(f)(x)(y) := f(x, y). \end{aligned}$$

   Überprüfen Sie, dass der Bildbereich von $\mathrm{h_{kan}}$ Teilmenge von $C(X, C(Y, Z))$ ist, d.h., überprüfen Sie:

   i) Sei $x \in X$. Ist $\mathrm{h_{kan}}(f)(x) \in C(Y, Z)$?

   ii) Ist $\mathrm{h_{kan}}(f) \in C(X, C(Y, Z))$?

   Außerdem fragen wir:

   iii) Ist $\mathrm{h_{kan}}$ stetig?

   iv) Ist $\mathrm{h_{kan}}$ injektiv?

d) Nun sei Y lokalkompakt. Ist die kanonische Abbildung $\mathrm{h_{kan}}$ surjektiv?

e) Nun seien X hausdorffsch und Y lokalkompakt. Ist die kanonische Abbildung $\mathrm{h_{kan}}$ ein Homöomorphismus? Im bejahenden Fall spricht man von einem Exponentialgesetz.

   Ein bekanntes Beispiel ist $\mathrm{Fun}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Fun}(X, \mathrm{Fun}(Y, Z))$ für die Mengen der Funktionen $\mathrm{Fun}(X, Y) = \{f \,:\, f \colon X \to Y\}$.

Bemerkung: Das Arbeiten mit den zahlreichen verschiedenen Voraussetzungen ist technisch schwierig. Man wählt daher oft eine genügend enge Kategorie von Räumen, in denen alle Voraussetzungen stets erfüllt sind.