Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 8

Abgabe am 25.06.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Die komplexen Zahlen tragen die übliche Topologie. Wir fassen die Kreislinie S^1 als Unterraum von $\mathbb{C}$ auf. Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X = [0,1]$ welche 0 und 1 identifiziert und die Abbildung $f : X/_\sim \to S^1$ vermöge $f([t]) := e^{2\pi i t}$. Bezeichne $p : X \to X/_\sim$ die Projektionsabbildung.

i) Ist f wohldefiniert? Ist f ein Homömorphismus?

ii) Ist $f \circ p$ offen?

Definiton. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt:

i) *nirgends dicht*, wenn $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$

ii) *mager* oder *von erster Kategorie*, wenn es nirgends dichte Mengen $N_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$.

Das Komplement einer mageren Menge heißt *residuell* oder *komager*. Ist eine Menge nicht mager, heißt sie *von zweiter Kategorie*.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Welche dieser Bedingungen sind äquivalent?

i) Für jede abzählbare Familie abgeschlossener, nirgends dichter Teilmengen $N_n \subseteq X$ gilt auch $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n)^\circ = \emptyset$.

ii) Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $U_n \subseteq X$ offen und dicht in X. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.

iii) Jede offene, nicht-leere Teilmenge $U \subseteq X$ ist von zweiter Kategorie.

iv) Residuelle Mengen sind dicht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**. Der Satz von Baire**
Zeigen Sie, dass jeder vollständige metrische Raum Eigenschaft ii) aus der vorigen Aufgabe hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen gelten:

i) Jede komagere Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist von zweiter Kategorie.

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f mager.

iii) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau auf $\mathbb{Q}$ stetig ist.