Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 9

Abgabe am 02.07.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Definiton. Ein topologischer Raum X heißt *folgenkompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jede Folge $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X folgenkompakt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq X$ sei

$$\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x, y) \;:\; x, y \in S\}$$

der Durchmesser der Teilmenge S.
Zeigen Sie: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $S \subseteq X$, die $\operatorname{diam}(S) < \lambda$ erfüllt, vollständig in einer der Mengen U_i enthalten ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Seien X, Y nicht leere Mengen, R eine (zweistellige) Relation auf X und $\sim$ die durch R erzeugte Äquivalenzrelation auf X. Es gelte für eine Funktion $f : X \to Y$:

$$\forall x, y \in X (xRy \to f(x) = f(y)).$$

Gilt dann auch

$$\forall x, y \in X (x \sim y \to f(x) = f(y))?$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

1. Seien $(X_i, \mathscr{O}_i), (Y_i, \mathscr{O}_i')$, $1 \leq i \leq n$ topologische Räume und $f_i : X_i \to Y_i$ Homöomorphismen. Ist dann $\prod X_i$ homöomorph zu $\prod Y_i$?

2. Es sei $(\mathbb{Z}^n, +)$ die Gruppe $\underbrace{(\mathbb{Z}, +) \times \cdots \times (\mathbb{Z}, +)}_{n}$. Die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ operiere auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\oplus\left((z_1, \ldots, z_n), (r_1, \ldots, r_n)\right) := (z_1 + r_1, \ldots, z_n + r_n)$$

   a) Ist $\oplus$ tatsächlich eine Gruppenoperation?
   b) Ist $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n}$ homöomorph zu $\underbrace{\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \times \cdots \times \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}}_{n}$?
   c) Ist $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n}$ homöomorph zu $\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$? Letzterer Homöomophietyp heißt „n-dimensionaler Torus".

(Lese-)Anregung ohne Bepunktung: Ist der zweidimensionale Torus $S^1 \times S^1$ als Teilmenge $\mathbb{R}^3$ durch $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ parametrisierbar? Man findet Formeln unter dem Stichwort Torus auf der Wikipedia und auf Wolfram Mathematics. Vielleicht sind Sie so geübt im Umgang mit Verwandten der Kugelkoordinaten, dass Sie lieber selbst eine Parametrisierung (einen Homöomorphismus) ersinnen.

Bitte wenden

Definiton. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine stetige Funktion $H : X \times [0, 1] \to X$ gibt, so dass für alle $x \in X$

$$H(x, 0) = x \text{ und } H(x, 1) = x_0.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen sie:

1. Die offene n-dimensionale Einheitskugel $B^n = \{r \in \mathbb{R}^n \,:\, |r| < 1\}$ ist zusammenziehbar.
2. Wenn X zusammenziehbar ist, dann ist X wegzusammenhängend.
3. Wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist X zusammenziehbar.