

Blatt 11

Abgabe am 16.07.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X genau dann abelsch ist, wenn für alle $x, y \in X$ der Isomorphismus

$$J_{\gamma_0}: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y),$$

$$[\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1} * \gamma * \gamma_0]$$

nicht vom Weg γ_0 von x nach y abhängt.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien $(G, +), (H, +), (K, +)$ abelsche Gruppen und $a: K \rightarrow G, b: K \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das amalgamierte Produkt von G und H über K (auch Pushout, gefasertes/amalgamiertes Koprodukt, gefaserte/amalgamierte Summe genannt) durch

$$G *_K H = (G \times H)/Q, \quad Q = \{(a(k), -b(k)) | k \in K\},$$

mit der Gruppenverknüpfung

$$((g_1, h_1) + Q) + ((g_2, h_2) + Q) = (g_1 + g_2, h_1 + h_2) + Q.$$

Ist $(G \times H)/Q$ eine abelsche Gruppe?

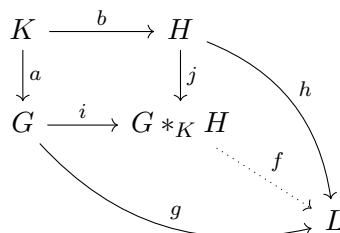
Seien $i: G \rightarrow G *_K H$ und $j: H \rightarrow G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, also $i(g) = (g, 0) + Q, j(h) = (0, h) + Q$. Sei L eine Gruppe und seien $g: G \rightarrow L, h: H \rightarrow L$ Homomorphismen, so dass

$$g \circ a = h \circ b: K \rightarrow L. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass es genau ein Gruppenhomomorphismus f existiert, so dass:

$$f: G *_K H \rightarrow L \text{ und } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j.$$

Man kann die Situation in folgendem Diagramm beschreiben, muss sich aber merken, dass Gleichung (1) dazugehört.



Bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ definieren wir den Kommutator $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definieren wir die Abelisierung von G als $G^{\text{ab}} := G/\{[g, h] : g, h \in G\}$. Es sei $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten.

Zeigen Sie:

1. Die Gruppe G^{ab} ist abelsch (kommutativ).
2. Sei H eine abelsche Gruppe und $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H$, so dass $f = f^{\text{ab}} \circ p$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien G, H Gruppen, $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}, q: H \rightarrow H^{\text{ab}}$ wie oben, und $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus.

Zeigen Sie:

1. Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\text{ab}} \circ p$.
2. Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.