Heike Mildenberger
Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 11

Abgabe am 16.07.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X genau dann abelsch ist, wenn für alle $x, y \in X$ der Isomorphismus

$$\begin{aligned} J_{\gamma_0} \colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(X, y), \\ [\gamma] &\mapsto [\gamma_0^{-1} * \gamma * \gamma_0] \end{aligned}$$

nicht vom Weg γ_0 von x nach y abhängt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $(G, +), (H, +), (K, +)$ abelsche Gruppen und $a : K \to G, b : K \to H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das amalgamierte Produkt von G und H über K (auch Pushout, gefasertes/amalgamiertes Koprodukt, gefaserte/amalgamierte Summe genannt) durch

$$G *_K H = (G \times H)/Q, \quad Q = \{(a(k), -b(k)) | k \in K\},$$

mit der Gruppenverknüpfung

$$((g_1, h_1) + Q) + ((g_2, h_2) + Q) = (g_1 + g_2, h_1 + h_2) + Q.$$

Ist $(G \times H)/Q$ eine abelsche Gruppe?

Seien $i : G \to G *_K H$ und $j : H \to G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, also $i(g) = (g, 0) + Q$, $j(h) = (0, h) + Q$. Sei L eine Gruppe und seien $g \colon G \to L$, $h \colon H \to L$ Homomorphismen, so dass

$$g \circ a = h \circ b \colon K \to L. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass es genau ein Gruppenhomomorphismus f existiert, so dass:

$$f \colon G *_K H \to L \text{ und } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j.$$

Man kann die Situation in folgendem Diagramm beschreiben, muss sich aber merken, dass Gleichung (1) dazugehört.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & H \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
G \arrow[r, "i"] \arrow[drr, bend right, "g"] & G *_K H \arrow[dr, dotted, "f"] & \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

Bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ definieren wir den Kommutator $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definieren wir die Abelisierung von G als $G^{\mathrm{ab}} := G/\{[g,h] \,:\, g, h \in G\}$. Es sei $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten.
Zeigen Sie:

1. Die Gruppe G^{ab} ist abelsch (kommutativ).
2. Sei H eine abelsche Gruppe und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $f^{\mathrm{ab}}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H$, so dass $f = f \circ p$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien G, H Gruppen, $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}, q\colon H \to H^{\mathrm{ab}}$ wie oben, und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus.
Zeigen Sie:

1. Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\mathrm{ab}}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\mathrm{ab}} \circ p$.
2. Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.