

### Bonus-Blatt

Abgabe am 23.07.2019 vor 10:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Briefkasten 3.27 oder 3.28 im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{P}(X)$  zwei Topologien auf  $X$ . Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

$\mathcal{O}'$  ist genau dann feiner als  $\mathcal{O}$ , wenn  $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$  stetig ist.

**Aufgabe 2** (6 Punkte). Welche Trennungsaxiome erfüllen die folgende topologische Räume? Welche unter ihnen sind kompakt?

1. Es sei  $X$  eine Menge, die aus mindestens zwei Elementen besteht, mit der indiskreten Topologie  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$  ausgestattet.
2. Nun sei  $X$  eine unendliche Menge mit der kofiniten Topologie  $\mathcal{O}_{\text{kofinit}} = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ ist endlich}\}$  ausgestattet.
3. Wir statten  $\mathbb{N}$  mit der Topologie  $\mathcal{O}_{<}$  der oberen Kegel aus, in der eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{N}$  offen ist, wenn aus  $m \in U$  für alle  $n \geq m$  die Bedingung  $n \in U$  folgt.

**Aufgabe 3** (2 Punkte). Geben Sie eine Funktion  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  an, so dass

für jedes  $t \in I$  die Abbildung  $H(\cdot, t)$  stetig ist

für mindestens ein  $s$  die Abbildung  $H(s, \cdot)$  nicht stetig ist.

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Sei  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  mit der Spurtopologie der Standardtopologie von  $\mathbb{R}$ . Wir statten  $I^{\mathbb{N}}$  und  $I^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  mit der Produkttopologie aus.

1. Sind  $I^{\mathbb{N}}$  und  $I^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  homöomorph?
2. Nun statten wir  $I$  mit irgendeiner Topologie aus und fragen wieder: Sind  $I^{\mathbb{N}}$  und  $I^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  homöomorph?

**Aufgabe 5** (4 Punkte). Sei  $(X, \mathcal{O})$  vollständig regulär.

1. Gibt es eine Menge  $L$ , so dass  $(X, \mathcal{O})$  in  $I^L$  einbettbar ist?
2. Wird die Topologie von  $(X, \mathcal{O})$  von einer uniformen Struktur erzeugt? Beweisen Sie Ihre Antworten.