Aufgabe 1 *(Geometrische Bedeutung komplexer Begriffe)*

a) Skizzieren Sie die folgenden Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}, \quad z_3 = 2(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i \sin\tfrac{5\pi}{3}).$$

b) Erklären Sie die *geometrische Bedeutung* der folgenden Begrifflichkeiten oder Sachverhalte:

Absolutbetrag $|z|$, Realteil Re z, Imaginärteil Im z, $|z|^2 = (\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2$, Argument arg z, komplexe Konjugation $\bar{z}$, Addition $w + z$, Subtraktion $w - z$, Multiplikation $w \cdot z$, Division $\frac{w}{z}$ für $z \neq 0$, $\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\ z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

c) Skizzieren Sie jeweils die Menge aller z mit folgenden Eigenschaften:

$\mathrm{Re}\ z = 0$, $|\mathrm{Re}\ z| = |\mathrm{Im}\ z|$, $(\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2 = r$ mit $r > 0$, $\mathrm{Re}\ z \in M \wedge \mathrm{Im}\ z \in M$ mit $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sin(\mathrm{Im}\ z) + \sin(\mathrm{Im}\ \bar{z}) = 0$.

Aufgabe 2 *(Rechnen mit komplexen Zahlen)*

a) Vereinfachen Sie weitestmöglich die folgenden Ausdrücke: $(1 + 2i)^3$, $(\frac{2+i}{3-2i})^2$.

b) Schreiben Sie z_1 aus Aufgabe 1 a) in der Form $re^{i\varphi}$.

c) Schreiben Sie z_2 und z_3 aus Aufgabe 1 a) jeweils in der Form $a + ib$.

d) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender Zahlen: $(\frac{2+4i}{1-i})^2$, $\frac{z-1}{z+1}$ mit $z = x + iy$.

e) Berechnen Sie die Norm von $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

Aufgabe 3 *(Komplexe Konjugation)*
Beweisen Sie folgenden Eigenschaften der komplexen Konjugation:

$\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$, $\overline{wz} = \overline{w} \cdot \overline{z}$, $\overline{(\overline{z})} = z$ (komplexe Konjugation ist *involutiv*), $z\overline{z} = x^2 + y^2$ für $z = x + iy$, $|z| = |\overline{z}|$, $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *(Konvexe Hülle)*
Seien $a_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ gegeben. Zeigen Sie: Aus $|a_i| < 1$, $0 \leq \lambda_i$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ folgt $|\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i| < 1$. Geben Sie eine anschauliche Interpretation.

Aufgabe 5 *(Formel von de Moivre)*
Beweisen Sie für $n \in \mathbb{Z}$ die Formel von de Moivre: $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Aufgabe 6 *(Matrixdarstellung des komplexen Zahlenkörpers)*
Zeigen Sie: Die reellen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ bilden unter der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper, der zu $\mathbb{C}$ isomorph ist.

Welche Matrizen entsprechen den reellen Zahlen, welche den imaginären?