Aufgabe 1 *(Lagrangesche Identität & Ungleichung von Cauchy-Schwarz)*

a) Seien $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq n$ gegeben. Verifizieren Sie die Lagrangesche Identität

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i|^2.$$

b) Folgern Sie für den unitären Vektorraum $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle v, w\rangle = v^t \cdot \overline{w}$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w\rangle| \leq |v|\,|w|$. Schließen Sie direkt aus a), wann Gleichheit eintritt.

Aufgabe 2 *(Geometrie in der komplexen Ebene)*

Zeigen Sie, daß drei paarweise verschiedene Punkte $a, b, c \in \mathbb{C}$ genau dann die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, wenn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ gilt.

Aufgabe 3 *(Wurzeln komplexer Zahlen)*

a) Berechnen Sie für $n \geq 2$ alle n-ten Wurzeln von $z = a + ib$, das heißt alle Lösungen der Gleichung $\zeta^n = z$. Geben Sie dabei die Lösungen in der Form $\zeta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, im Fall $n = 2$ zusätzlich in der Form $\zeta = \alpha + i\beta$ an.

b) Zeigen Sie, daß keine auf ganz $\mathbb{C}$ stetige Quadratwurzel existiert, es also keine stetige Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f^2(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt. Finden Sie eine naheliegende, bezüglich Inklusion maximale Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der eine stetige Wurzelfunktion existiert.

c) Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *n-te Einheitswurzel*, falls $z^n = 1$ gilt. Berechnen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Summe, sowie das Produkt aller n-ten Einheitswurzeln.

Aufgabe 4 *(Anordnung: Vergleich $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{C}$)*

Ein *geordneter Körper* ist ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit einer (totalen) Ordnung $\leq$, die folgenden Axiomen genügt: **A1** Aus $a \leq b$, $c \in \mathbb{K}$ folgt $a + c \leq b + c$. **A2** Aus $0 \leq a$, $0 \leq b$ folgt $0 \leq a \cdot b$.

a) Zeigen Sie, daß der Körper $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann, das heißt es existiert keine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{C}$, die den Axiomen A1, A2 genügt.

b) Bestimmen Sie alle Körperautomorphismen auf $\mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie alle stetigen Körperautomorphismen auf $\mathbb{C}$.

Anmerkung: Bei der Bestimmung der Körperautomorphismen auf $\mathbb{R}$ geht wesentlich die Existenz einer Anordnung - die nach Teil a) auf $\mathbb{C}$ fehlschlägt - ein. Verzichtet man auf Stetigkeit, so existieren auf $\mathbb{C}$ in der Tat überabzählbar unendlich viele Körperautomorphismen.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 29.04.2008, bis 9.15 Uhr.