Aufgabe 1 *(Laurent-Entwicklung)*

a) Berechnen Sie die *Laurent-Reihe* der Funktion $\frac{1}{z(z-3)^2}$ für $1 < |z-1| < 2$.

b) Berechnen Sie den *Hauptteil* der Laurent-Reihe der Funktion $\frac{z-1}{\sin^2 z}$ für $0 < |z| < \pi$.

c) Bestimmen Sie das *Konvergenzgebiet* der Laurent-Reihe $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} 2^n(z+2)^n$.

Aufgabe 2 *(Zur Existenz holomorpher Zweige)*

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein die Punkte ± 1 nicht umfassendes Gebiet. Überdies seien ± 1 in derselben Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ enthalten. Zeigen Sie, daß auf Ω ein holomorpher Zweig von $\sqrt{1-z^2}$ existiert.

b) Bestimmen Sie sämtliche möglichen Werte von $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ über einen geschlossenen Weg in Ω.

Aufgabe 3 *(Homologie & mehrfach zusammenhängende Mengen)*

a) Sei Γ eine geschlossene 1-Kette in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Existiert eine 2-Kette Λ in Ω mit $\partial\Lambda = \Gamma$, so ist Γ nullhomolog in Ω.

b) Zeigen Sie, daß ein einfach zusammenhängendes Gebiet nach Entfernung von m Punkten $m+1$-fach zusammenhängend ist und finden Sie eine Homologiebasis.

Anmerkung: Zum Begriff der 2-Kette siehe Serie 9, Aufgabe 4.

Aufgabe 4 *(Jordanscher Kurvensatz für stückweise C^1-Kurven)*

Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *einfach geschlossen*, wenn er geschlossen und auf $[a,b)$ injektiv ist. Zeigen Sie: Ist γ einfach geschlossen und stückweise C^1, so besteht $\mathbb{C} \setminus \text{spur}\,\gamma$ aus genau zwei Komponenten, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Folgen Sie dabei nachstehender Argumentation:

1.) Es existieren *mindestens* zwei Komponenten:
- In gewissen kleinen Bereichen läßt sich die Kurve als Graph über ihrer Tangente schreiben.
- Der Graph ist in einem geeigneten Rechteck enthalten, das keine weiteren Kurvenpunkte enthält.
- Es gibt durch den Graph getrennte Punkte p, q innerhalb des Rechtecks mit $n(\gamma, p) \neq n(\gamma, q)$.

2.) Es existieren *höchstens* zwei Komponenten:
- Sind die Ränder zweier Komponenten nicht disjunkt, so sind sie identisch.
- Der Rand jeder Komponente ist bereits die gesamte Kurve.
- Es gibt höchstens, und damit *genau* zwei Komponenten, eine beschränkte und eine unbeschränkte.

Anmerkung: Der *Jordansche Kurvensatz* gilt wesentlich allgemeiner auch für *stetige* Kurven, also auch ohne der Voraussetzung stückweiser Differenzierbarkeit noch.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 08.07.2008, bis 9.15 Uhr.