Aufgabe 1 *(Komplexe Differenzierbarkeit)*

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

i) $f(z) = |z|^2$,
ii) $f(z) = \frac{z}{|z|}$ (für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$),
iii) $f(z) = \min\{0, (|z|-1)^3\}$,
iv) $f(x+iy) = x^3y^2 + i\,x^2y^3$.

Aufgabe 2 *(Holomorphe Funktionen mit gegebenen Eigenschaften)*

a) Existiert eine in einer offenen Umgebung des Nullpunktes holomorphe Funktion, die für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt?

   i) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1}$,
   ii) $0 < |f(\frac{1}{n})| < e^{-n}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ mit Realteil $x^2 + 2a\,xy + b\,y^2$.

Aufgabe 3 *($\mathbb{S}^2$ als Riemannsche Fläche)*

Es sei $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, $N := (0,0,1)$, $S := (0,0,-1)$. Die *stereographische Projektion* $\varphi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ *vom Nordpol* ordnet jedem $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ den Schnittpunkt der Geraden durch N und p mit der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ zu. Entsprechend wird $\varphi_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$ definiert.

a) Leiten Sie anhand der geometrischen Definition die konkreten Formeln für φ_N und φ_S, sowie für die Umkehrabbildungen φ_N^{-1} und φ_S^{-1} her.

b) Zeigen Sie: Die Abbildungen $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind (reelle) C^∞-Diffeomorphismen, jedoch (als Abbildungen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) nicht holomorph.

c) Eine bijektive, in beiden Richtungen holomorphe Abbildung heißt *biholomorph*. Zeigen Sie: $\overline{\varphi}_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\varphi_N \circ (\overline{\varphi}_S)^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind biholomorph.

Anmerkung: $\mathbb{S}^2$ ist Hausdorff mit abzählbarer Basis und lokal homöomorph zu $\mathbb{C}$, mit dem komplexen Atlas $\{\varphi_N, \overline{\varphi}_S\}$ also eine komplexe 1-dim. Mannigfaltigkeit, eine *Riemannsche Fläche*.

Aufgabe 4 *(Potenzreihen: Konvergenz & Beispiel einer Lückenreihe)*

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (n \sinh \frac{1}{n})^n z^n$.

b) Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ hat den Konvergenzradius 1 und die durch sie dargestellte holomorphe Funktion auf $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ läßt sich auf kein Gebiet Ω mit $B_1 \subsetneq \Omega$ holomorph fortsetzen.

Anmerkung: Der *sinus hyperbolicus* ist gegeben durch $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 06.05.2008, bis 9.15 Uhr.