Aufgabe 1 *(Zusammenhängende und wegzusammenhängende Mengen)*

a) Zeigen Sie: Jeder wegweise zusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend. Weisen Sie dazu nach, daß $[0,1]$ zusammenhängend ist und folgern Sie daraus die Aussage.

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ (mit der induzierten Topologie) wegweise zusammenhängend, bzw. zusammenhängend sind:

i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : \text{ Im } z \text{ oder Re } z \text{ ist irrational}\}$,

ii) $M_2 := \{(1-\frac{1}{\varphi})\, e^{i\varphi} : \varphi \in [1,\infty)\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Aufgabe 2 *(Konstante holomorphe Funktionen)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $\bar{f}$ ist holomorph in Ω; *ii)* f ist konstant in Ω; *iii)* $|f|$ ist konstant in Ω;
iv) $\arg f$ ist konstant in Ω; *v)* $\operatorname{Re} f$ ist konstant in Ω; *vi)* $\operatorname{Im} f$ ist konstant in Ω.

Aufgabe 3 *(Umkehrsatz & Anwendung auf den Logarithmus)*

Für holomorphe C^1-Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen gilt die folgende komplexe Variante des *Satzes über implizite Funktionen*: Gilt $f'(z_0) \neq 0$, so existiert eine offene Umgebung U von z_0, so daß $V := f(U)$ offene Umgebung von $w_0 := f(z_0)$ und $f : U \to V$ biholomorph ist.

a) Beweisen Sie voranstehenden Satz mit Hilfe des Satzes über inverse Funktionen aus der reellen Analysis. Zeigen Sie ferner $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

b) *i)* Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ein $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$ heißt *Logarithmus* von z. Zeigen Sie: Jeder Logarithmus von z ist von der Form $w = \log|z| + i \arg z$.

ii) Welche Ableitung muß eine lokale Umkehrabbildung der Exponentialfunktion haben?

iii) Zeigen Sie: Log: $\{x+iy \in \mathbb{C} : x > 0\} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Log}(x+iy) := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$ definiert eine auf ihrem Definitionsbereich holomorphe Logarithmusfunktion.

Anmerkung: Die Funktion log bezeichne hierbei jeweils den gewohnten *reellen* Logarithmus.

Aufgabe 4 *(Fundamentalsatz der Algebra)*

Beweisen Sie: *Jedes nichtkonstante Polynom hat in $\mathbb{C}$ wenigstens eine Nullstelle.* Folgen Sie dabei nachstehender Argumentation:

- Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nichtkonstantes Polynom. Setze P durch $P(\infty) := \infty$ stetig auf $\hat{\mathbb{C}}$ fort.
- Angenommen P besitzt keine Nullstelle. Dann definiert $1/P : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
- Für jedes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ wird λz mit $\lambda := \sup\{\mu \geq 0 : \mu z \in 1/P(\hat{\mathbb{C}})\}$ durch $1/P$ angenommen.
- In keinem solchen Punkt λz ist $1/P$ lokal invertierbar - dies führt auf einen Widerspruch.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 20.05.2008, bis 9.15 Uhr.