Aufgabe 1 *(Integration mit Ausnahmepunkten auf dem Rand)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, die in $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$ holomorph sei.

a) Ist f stetig in den a_i, so gilt $\int_{\partial R} f(\zeta)\, d\zeta = 0$ für jedes Rechteck $\bar{R} \subset \Omega$ - selbst wenn $a_i \in \partial R$.

b) Anstelle von Stetigkeit sei nunmehr lediglich $\lim_{z \to a_i} (z - a_i)^2 f(z) = 0$ vorausgesetzt. Zeigen Sie, daß im Fall $a_i \in \partial R$ die Aussage aus Teil a) im Allgemeinen nicht mehr gilt.

Aufgabe 2 *(Integration über geschlossene Wege)*

a) Es sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus [0,1]$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Zeigen Sie, daß $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ gilt.

b) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $h : U \cup V \to \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Weg γ in U bzw. in V gelte $\int_\gamma h(\zeta)\, d\zeta = 0$. Zeigen Sie: Ist $U \cap V$ zusammenhängend, so gilt $\int_\gamma h(\zeta)\, d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in $U \cup V$.

Aufgabe 3 *(Trigonometrische & hyperbolische Funktionen)*

a) Zeigen Sie jeweils *Existenz*, sowie *Eindeutigkeit* einer auf ganz $\mathbb{C}$ zweimal komplex differenzierbaren C^2-Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die das jeweilige Anfangswertproblem in *i)* bzw. *ii)* löst:

i) $f'' + f = 0$ mit $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ (f heißt *cosinus*);

ii) $f'' - f = 0$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ (f heißt *sinus hyperbolicus*).

b) Ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\cos w = z$ heißt *arcus cosinus* von z. Drücken Sie w mit Hilfe eines komplexen Logarithmus aus. Welche Ableitung muß eine lokale Umkehrabbildung des cosinus haben?

Anmerkung: Als bekannt aus der reellen Analysis sei vorausgesetzt: Für $0 \in I = (t_1, t_2)$, $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Anfangswertproblem $g'' + g = 0$ auf I mit $g(0) = a$, $g'(0) = b$ genau eine Lösung $g \in C^2(I)$.

Aufgabe 4 *(Fibonacci-Reihe)*

Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Sei $f : B_r \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Dabei bezeichne r den Konvergenzradius der Reihe.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r.

b) Finden Sie $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus B_r$ und eine holomorphe Abbildung $h : \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\} \to \mathbb{C}$ mit $h|B_r = f$.

c) Gilt $\int_\gamma h(\zeta)\, d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ (vgl. Aufgabe 2 a))?

Anmerkung: Die Abbildung h ist eindeutig bestimmt, ein Beweis jedoch hierfür ist nicht verlangt. Zu ihrer Bestimmung kann der Ansatz $f_n = \sigma(\theta^n - (1-\theta)^n)$ mit geeigneten σ, θ hilfreich sein.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 27.05.2008, bis 9.15 Uhr.