Aufgabe 1 *(Höhere Ableitungen mittels Parameterdifferentiation)*

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_r \subset\subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Folgern Sie mittels Parameterdifferentiation direkt aus der Integralformel von Cauchy für jedes $z \in B_r$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Aufgabe 2 *(Verallgemeinerter Satz von Liouville)*

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $\alpha \geq 0$ gelte überdies

$$\limsup_{z \to \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} < \infty.$$

Zeigen Sie, daß f dann ein Polynom vom Grad $n \leq [\alpha]$ ist, wobei $[\alpha] := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq \alpha\}$.

Aufgabe 3 *(Transformationssatz für Potenzreihen)*

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^\infty c_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Zeigen Sie: Ist $z_1 \in B_r(z_0)$, dann gilt zumindest für alle z mit $|z - z_1| < r - |z_1 - z_0|$ die Gleichung

$$\sum_{n=0}^\infty c_n(z - z_0)^n = \sum_{k=0}^\infty \zeta_k (z - z_1)^k \qquad \text{mit } \zeta_k := \sum_{n=k}^\infty \binom{n}{k} c_n (z_1 - z_0)^{n-k}.$$

Anmerkung: Ist $r = \infty$, so sei $r - |z_1 - z_0|$ ebenfalls $= \infty$.

Aufgabe 4 *(Fresnel-Integrale)*

a) Beweisen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| \leq 1$ die folgende Formel:

$$\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2 t^2} dt \;=\; \frac{1}{2}\, \frac{1 - ia}{1 + a^2} \sqrt{\pi}.$$

Integrieren Sie dazu $f(z) = e^{-z^2}$ entlang $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, wobei γ_1 die Strecke von 0 nach r (für $r > 0$) bezeichne, γ_2 die Strecke von r nach $r(1 + ai)$, sowie γ_3 die von $r(1 + ai)$ nach 0.

b) Folgern Sie nun:

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 03.06.2008, bis 9.15 Uhr.