Aufgabe 1 *(Untersuchung auf Holomorphie im Ursprung)*

Es bezeichne Log: $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ den *Hauptzweig des Logarithmus*, das heißt $-\pi < \mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\; z) < \pi$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (vgl. Serie 3, Aufgabe 3). Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin\Big[\bar{z} + e^{-1/z^3} \cos\Big(\frac{1}{z}\,\mathrm{Log}\Big(\frac{z+2|\mathrm{Re}\, z|}{|z|^2}\Big)\Big)\Big] & , \text{ falls } z \neq 0, \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in einer Umgebung von $z = 0$ holomorph ist.

Aufgabe 2 *(Eigenschaften der Bildmenge holomorpher Funktionen)*

a) Sei f eine nichtkonstante ganze Funktion, $\varepsilon > 0$, sowie $M := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \varepsilon\}$. Zeigen Sie:
   i) M ist nicht leer.
   ii) $f(\mathbb{C})$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.
   iii) Es gilt $f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, $f(\mathbb{C}) \cap i\,\mathbb{R} \neq \emptyset$, sowie $f(\mathbb{C}) \cap \partial B_1(0) \neq \emptyset$.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Für alle $z \in \Omega$ gelte:
$$\text{Ist } \; h(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \; \text{ so ist } \; \tfrac{\mathrm{Re}\, h(z)}{\mathrm{Im}\, h(z)} \in \mathbb{Q}.$$
Zeigen Sie, daß h konstant ist.

Anmerkung: Folgern Sie a) *ii)* direkt aus a) *i)* *ohne* Verwendung der Aussage in Aufgabe 3 a).

Aufgabe 3 *(Ganze transzendente Funktionen & Polynome)*

a) Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt *ganze transzendente Funktion*. Zeigen Sie: Ist f eine solche, so liegt für *jedes* $r \geq 0$ selbst noch die Menge $f(\mathbb{C} \setminus B_r(0))$ dicht in $\mathbb{C}$.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $\beta \geq 0$ gelte überdies
$$\liminf_{z \to \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\beta} > 0.$$
Zeigen Sie, daß f dann ein Polynom vom Grad $n \geq \lceil \beta \rceil$ ist, wobei $\lceil \beta \rceil := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq \beta\}$.

Anmerkung: Stärker als a) gilt sogar $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \subset f(\mathbb{C} \setminus B_r(0))$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ (*Satz von Picard*); z.B. $z_0 = 0$ für $f(z) = e^z$ oder $\mathbb{C} \subset g(\mathbb{C} \setminus B_r(0))$ für $g(z) = \cos z$. Zu Teil b) vgl. Serie 5, Aufgabe 2.

Aufgabe 4 *(Fortsetzbarkeit in einem Punkt und auf der Kreisscheibe)*

Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gebe es ein $n' \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $n \geq n'$.

Zeigen Sie: Ist f in einer Umgebung von $z = 1$ holomorph fortsetzbar, so ist f auch auf $B_r(0)$ für ein $r > 1$ holomorph fortsetzbar.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 10.06.2008, bis 9.15 Uhr.