Aufgabe 1 *(Zum Wirtingerkalkül)*

a) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Beweisen Sie die folgenden *Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen*:

i) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}}}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}$. *ii) Produktregeln*: $\frac{\partial (fg)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial (fg)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$.

iii) Gilt $g(U) \subset V$, so gelten für alle $\zeta \in U$ (mit w als Variabler in V) folgende *Kettenregeln*:

$\frac{\partial (h \circ g)}{\partial z}(\zeta) = \frac{\partial h}{\partial w}(g(\zeta)) \frac{\partial g}{\partial z}(\zeta) + \frac{\partial h}{\partial \overline{w}}(g(\zeta)) \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}(\zeta)$, $\frac{\partial (h \circ g)}{\partial \bar{z}}(\zeta) = \frac{\partial h}{\partial w}(g(\zeta)) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(\zeta) + \frac{\partial h}{\partial \overline{w}}(g(\zeta)) \frac{\partial \overline{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Wirtingerkalküls: Sind $f_1, f_2, \ldots, f_n$ holomorph in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und ist die Funktion $|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2$ konstant in Ω, so ist bereits jede der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ konstant in Ω.

Aufgabe 2 *(Schwarzsches Spiegelungsprinzip)*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein zur reellen Achse symmetrisch gelegenes Gebiet (d.h. mit $z \in \Omega$ ist auch $\bar{z} \in \Omega$). Es sei $g : \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z \geq 0\} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, die auf $\{z \in \Omega : \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorph und auf $\{z \in \Omega : \operatorname{Im} z = 0\}$ reellwertig sei. Zeigen Sie, daß durch

$$\hat{g}(z) = \begin{cases} g(z)\,, & \text{falls } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{g(\bar{z})}\,, & \text{falls } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

eine auf ganz Ω holomorphe Funktion definiert wird.

Aufgabe 3 *(Konvexe-Hülleneigenschaft holomorpher Funktionen)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ eine stetige, auf Ω holomorphe Abbildung. Zeigen Sie, daß $f(\Omega)$ in der konvexen Hülle der Menge $f(\partial\overline{\Omega})$ enthalten ist.

Aufgabe 4 *(Harnackscher Konvergenzsatz)*

a) *i)* Sei $P_\varrho(\zeta, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{\varrho^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$ (= *Poissonkern* zu $B_\varrho(0)$). Zeigen Sie für $|z| < \varrho$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\varrho - |z|}{\varrho + |z|} \;\leq\; P_\varrho(\zeta, z) \;\leq\; \frac{1}{2\pi} \frac{\varrho + |z|}{\varrho - |z|}\,.$$

ii) Folgern Sie aus Teil *i)*: Ist f stetig auf $\overline{B_\varrho(0)}$, harmonisch auf $B_\varrho(0)$ und nichtnegativ, dann gilt für $|z| \leq r < \varrho$ die *Harnack-Ungleichung*

$$\frac{\varrho - r}{\varrho + r} f(0) \;\leq\; f(z) \;\leq\; \frac{\varrho + r}{\varrho - r} f(0)\,.$$

b) Es sei $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ eine monotone Folge harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$. Es gebe ein $z_0 \in \Omega$ und ein $M \in \mathbb{R}$ mit $f_n(z_0) \leq M$ für alle n. Zeigen Sie: Die Folge f_n konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion f.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 17.06.2008, bis 9.15 Uhr.