Aufgabe 1 *(Rand einer 1-Kette)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und Γ eine 1-Kette in Ω. Mit $\partial\Gamma$ sei der Rand von Γ bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Ist $\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j\,[\gamma_j]$ mit $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \Omega$, so gilt
$$\partial\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j\,(\,[\gamma_j(b_j)] - [\gamma_j(a_j)]\,)\,,$$
insbesondere ist $\partial\Gamma$ eine 0-Kette in Ω.

b) Γ ist genau dann geschlossen, wenn jeder Punkt aus Ω (mit Vielfachheit) genauso oft als Anfangs- wie als Endpunkt der Wege einer gegebenen Darstellung vorkommt. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Wahl der Darstellung.

Aufgabe 2 *(Spezielle Darstellung von 1-Ketten)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, Γ eine 1-Kette in Ω, sowie $z_0 \in \Omega \setminus \operatorname{spt}\Gamma$. Zeigen Sie: Γ besitzt eine Darstellung $\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j\,[\gamma_j]$ mit $z_0 \notin \operatorname{spur}\gamma_j$ für alle j.

Aufgabe 3 *(Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen)*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein zur reellen Achse symmetrisch gelegenes Gebiet (vgl. Serie 7, Aufgabe 2). Es sei $u : \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z \geq 0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die auf $\{z \in \Omega : \operatorname{Im} z > 0\}$ harmonisch und auf $\{z \in \Omega : \operatorname{Im} z = 0\}$ identisch 0 sei. Zeigen Sie, daß durch
$$\hat{u}(z) = \begin{cases} u(z)\,, & \text{falls } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -\,u(\bar{z})\,, & \text{falls } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$
eine auf ganz Ω harmonische Funktion definiert wird.

Aufgabe 4 *(Klassisches Maximumprinzip)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie: Ist u *subharmonisch* in Ω, d.h. gilt $\Delta u \geq 0$ in Ω, so folgt
$$\sup_\Omega u \;\leq\; \sup_{\partial\Omega} u.$$
Zeigen Sie dazu die Aussage zunächst unter der Annahme $\Delta u > 0$. Folgern Sie daraus anschließend den Fall $\Delta u \geq 0$, indem Sie eine Funktion $u + \varepsilon\varphi$ mit geeigneter Wahl von φ betrachten.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, dem 24.06.2008, bis 9.15 Uhr.