Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 1

Abgabe bis Mittwoch 2.5.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei V der zweidimensionale reelle Vektorraum der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Durch

$$\varphi(x) := i \cdot x, \quad x \in \mathbb{C},$$

ist eine lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{L}(V, V)$ gegeben. Ermitteln Sie das charakteristische Polynom P_φ von φ.

Betrachtet man jetzt $\mathbb{C}$ als eindimensionalen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$, so ist φ wieder linear. Bestimmen Sie auch für diese Situation das charakteristische Polynom von φ.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper. Für $n \geq 2$ sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Zeile.

(b) Verwenden Sie dies Ergebnis, um eine 3×3-Matrix über $\mathbb{Z}_3$ zu finden, die keine Eigenwerte in $\mathbb{Z}_3$ hat.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

(a) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\varphi \in \mathrm{L}(V, V)$. Zeigen Sie, daß $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ für ein geeignetes $\lambda \in K$ gilt, falls für jeden Vektor $v \in V$ ein $\lambda(v) \in K$ mit $\varphi(v) = \lambda(v) \cdot v$ existiert.

(b) Der Zentralisator einer Gruppe G ist definiert durch

$$Z(G) = \{a \in G : ab = ba \text{ für alle } b \in G\}.$$

Bestimmen Sie den Zentralisator $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.
Hinweis: Sie können (a) verwenden oder alternativ auch direkt die Bedingung $AB = BA$ unter anderem für Diagonalmatrizen B und $A \in Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ untersuchen.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{100}.

Anwesenheitsaufgabe für die zweite Woche (30.4.-2.5.)

Sei $\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ der Vektorraum der reellwertigen Folgen, d.h. der Abbildungen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ zusammen mit werteweiser Addition sowie werteweiser skalarer Multiplikation. Eine Folge $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$, die für $n \geq 2$ der Bedingung

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

genügt, heißt Fibonacci Folge.

(a) Zeigen Sie, daß die Fibonacci Folgen einen zweidimensionalen Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ bilden.

(b) Sei f eine Fibonacci Folge und $p_n := (f(n), f(n-1))^\top$, $n \geq 1$. Bestätigen Sie, daß gilt:

$$p_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n p_1.$$

Ermitteln Sie ferner die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie jetzt eine reguläre Matrix $T \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, die

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \Lambda$$

erfüllt.

(d) Beweisen Sie schließlich, daß für eine Fibonacci Folge f mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ die explizite Darstellung

$$f(n+1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

besteht, indem Sie zunächst

$$p_{n+1} = T\Lambda^n T^{-1} p_1$$

beweisen.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/