Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 3.7.2012

Prof. Dr. Martin Ziegler

Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 10

Abgabe bis Mittwoch 11.7.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. V sei ein Vektorraum mit einer Bilinearform $(\cdot,\cdot)$. Zeigen Sie, daß jede orthonormale Familie (das ist eine Familie von Vektoren $\{x_i \mid i \in I\}$, so daß $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$) linear unabhängig ist.

Aufgabe 2. Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Geben Sie für den durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

beschriebenen Endomorphismus eine ON-Basis aus Eigenvektoren an.

Aufgabe 3. Durch die Gleichung

$$x_1^2 + (3x_2)^2 + 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 8 = 0$$

wird eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$ beschrieben. Bringen Sie die Gleichung *(durch Verschieben)* auf Normalform.

Skizzieren Sie die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (3x_2)^2 + 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 8 = 0\}$.

Aufgabe 4. V sei ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit Basis $x_1, \ldots, x_n$. $(\cdot,\cdot)$ sei eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind (Das ist ein Spezialfall des sogenannten Hurwitzschen Kriteriums):

(i) $(\cdot,\cdot)$ ist positiv definit.

(ii)
$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \cdots & (x_1, x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_i, x_1) & \cdots & (x_i, x_i) \end{vmatrix} > 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Hinweis für (ii) $\Rightarrow$ (i): Versehen Sie V mit dem Standardskalarprodukt, und schließen Sie dann durch Induktion nach $\dim V$ und mit Aufgabe 4 von Blatt 9.

Aufgabe 5. (bis 8 Bonuspunkte) Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$.

$\mathbb{H}$ sei ein 4-dimensionaler reeller Vektorraum mit der Basis $\mathbf{1}, i, j, k$. Auf $\mathbb{H}$ wird eine Multiplikation definiert, indem die Produkte je zweier Basisvektoren festgelegt werden gemäß

$\cdot$	$\mathbf{1}$	i	j	k
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	i	j	k
i	i	$-\mathbf{1}$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-\mathbf{1}$	i
k	k	j	$-i$	$-\mathbf{1}$

.

(i) Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}$ mit dem so definierten Produkt zu einer assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra mit dem Einselement $\mathbf{1}$ wird. $\mathbb{H}$ heißt (reelle) Quaternionenalgebra.

(ii) $\mathbb{H}_0$ sei der 3-dimensionale reelle Untervektorraum, der von i, j, k erzeugt wird. Die Elemente von $\mathbb{H}_0$ heißen reine Quaternionen. Jedes Element $z \in \mathbb{H}$ besitzt also eine eindeutige Darstellung $z = \alpha + v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{H}_0$. Es sei

$$\mathrm{Re}(z) := \alpha, \quad \mathrm{Pu}(z) := v \quad (\text{der „reine Anteil“}),$$

$$\bar{z} := \alpha - v, \quad (\text{das Konjugierte von } z).$$

Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{H} \mid \bar{z} = -z\} = \{z \in \mathbb{H} \mid z \notin \mathbb{R} \setminus \{0\},\, z^2 \in \mathbb{R}\}.$$

(iii) Zeigen Sie, daß die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ (Konjugation), ein Antiautomorphismus ist, d.h. ein Automorphismus des Vektorraums $\mathbb{H}$, so daß gilt $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ für $x, y \in \mathbb{H}$.

(iv) Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}$ eine Divisionsalgebra ist, d.h., daß jedes $z \in \mathbb{H} \setminus \{o\}$ ein Inverses besitzt. Hinweis: Rechnen Sie $z\bar{z}$ aus.

(v) Zeigen Sie, daß durch

$$(x, y) := \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \mathrm{Re}(x\bar{y}) \in \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{H}$ definiert wird, für deren zugehörige Norm (definiert durch $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$) gilt: $\|x\|^2 = x\bar{x}$. Geben Sie eine Diagonalisierung von $(\cdot\,,\cdot)$ an, und folgern Sie, daß $\mathbb{H}_0$ mit $(\cdot\,,\cdot) \restriction \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0$ ein 3-dimensionaler Euklidischer Raum ist.

(vi) Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}_0$ unter Automorphismen der Algebra $\mathbb{H}$ invariant ist. (Zur Erinnerung: $f \in \mathrm{Aut}\mathbb{H}$ genau dann, wenn $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\mathbb{H}$, d.h. f ist Automorphismus des reellen Vektorraums $\mathbb{H}$, und zusätzlich $f(xy) = f(x)f(y)$ für $x, y \in \mathbb{H}$. Sie sollen zeigen, daß für solche f und $v \in \mathbb{H}_0$ gilt: $f(v) \in \mathbb{H}_0$.) Schließen Sie, daß für $f \in \mathrm{Aut}\mathbb{H}$ und $z \in \mathbb{H}$ gilt:

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}, \quad \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(z) = f(\mathrm{Re}(z)), \quad \mathrm{Pu}(f(z)) = f(\mathrm{Pu}(z)).$$

(vii) Fassen Sie die reinen Quaternionen $v_0 = \alpha i + \beta j + \gamma k$ bzgl. der Basis i, j, k als Spaltenvektoren auf. Zeigen Sie, daß für $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{H}_0$ gilt:

$$\det(v_1, v_2, v_3) = -\mathrm{Re}(v_1 v_2 v_3).$$

(Hier ist (v_1, v_2, v_3) als 3×3-Matrix zu verstehen.)
Hinweis: Zeigen Sie, daß

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto -\mathrm{Re}(v_1 v_2 v_3)$$

eine 3-Form ist, die für i, j, k den richtigen Wert liefert.

---

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/