Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 10.7.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 11

Abgabe bis Mittwoch 18.7.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Zwei hermitesche Sequilinearformen, die dieselbe Norm induzieren, sind gleich.

Hinweis: Berechnen Sie $(a \pm \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\} b)^2$.

Aufgabe 2. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Der linearen Abbildung $f_\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ sei bzgl. der Standardbasis die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

zugeordnet.

(a) Definiert A_α einen normalen Endomorphismus von $\mathbb{C}^2$?

(b) Bestimmen Sie die (komplexen) Eigenwerte λ_1, λ_2 von A_α.

(c) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A_α an.

(d) Geben Sie eine Matrix $Q_\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ an, so daß $D_\alpha = Q_\alpha^{-1} A_\alpha Q_\alpha$ Diagonalgestalt hat und bestimmen Sie D_α.

Aufgabe 3. Komplexifizierung reeller Vektorräume.
Es sei V ein reeller Vektorraum und

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V := V \times V$$

mit der skalaren Multiplikation

$$(a + bi)(v, w) = (av - bw, aw + bv).$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ ein komplexer Vektorraum ist.

(b) Es sei W ebenfalls ein reeller Vektorraum. Zeigen Sie: Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ läßt sich eindeutig fortsetzen zu einer linearen Abbildung $g : (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) \to (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W)$.

Aufgabe 4. Komplexifizierung reeller Vektorräume, Teil II.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ sei definiert wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Jede Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ läßt sich eindeutig fortsetzen zu einer Sesquilinearform $[\ ,\ ] : (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)^{(c)} \times (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) \to \mathbb{C}$.

(b) Die Bilinearform $(\ ,\ )$ ist genau dann symmetrisch, wenn die zugehörige Sesquilinearform $[\ ,\ ]$ hermitesch ist.

(c) $(V, (\ ,\ ))$ ist genau dann euklidisch, wenn $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V, [\ ,\ ])$ unitär ist.

Aufgabe 5. (bis 4 Bonuspunkte) Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$, Teil II.
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung der Aufgabe 5 im Blatt 10. Alle dort gemachten Aussagen dürfen (natürlich) verwendet werden, (i) – (vii) beziehen sich auf dortige Aufgabenteile.
Wegen (vi) ist für jedes $f \in \mathrm{Aut}\mathbb{H}$ die Restriktion $f \upharpoonright \mathbb{H}_0 : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$ ein Automorphismus des reellen Vektorraums $\mathbb{H}_0$.

(a) Zeigen Sie, daß für $f \in \mathrm{Aut}\mathbb{H}$ gilt: $f \upharpoonright \mathbb{H}_0 \in \mathrm{O}(3) = \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$; das heißt, daß für das in (v) definierte $(\cdot\,,\cdot)$ gilt:
$$(x, y) = (f(x), f(y)), \quad x, y \in \mathbb{H}_0.$$

(b) Zeigen Sie, daß für $f \in \mathrm{Aut}\mathbb{H}$ sogar gilt
$$f \upharpoonright \mathbb{H}_0 \in \mathrm{SO}(3) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$
(Hinweis: (vii).) Sie haben also gezeigt, daß es eine Abbildung
$$\Psi : \begin{cases} \mathrm{Aut}\mathbb{H} & \to & \mathrm{SO}(3) \\ f & \mapsto & f \upharpoonright \mathbb{H}_0 \end{cases}$$
gibt; dieses Ψ ist natürlich ein Gruppenhomomorphismus. Für $z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ sei $\kappa_z : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $x \mapsto zxz^{-1}$, die sogenannte Konjugation mit z.

(c) Zeigen Sie, daß $\kappa_z \in \mathrm{Aut}\mathbb{H}$, $z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, und daß die Abbildung $z \mapsto \kappa_z$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathrm{Aut}\mathbb{H}$ ist. Somit ergibt sich ein Gruppenhomomorphismus
$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{H} \setminus \{0\} & \mapsto & \mathrm{SO}(3) \\ z & \mapsto & \kappa_z \upharpoonright \mathbb{H}_0 = \Psi(\kappa_z). \end{cases}$$

(d) Sei $(V, (\cdot\,,\cdot))$ ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie, daß die orthogonalen Spiegelungen an Hyperflächen (vgl. Aufgabe 2 von Blatt 9) genau die Abbildungen der Form
$$\mathrm{S}_y : V \to V, \quad x \mapsto x - \frac{2(x, y)}{(y, y)} y,$$
sind, wobei $y \neq 0$.

Aufgabe 6. (bis 4 Bonuspunkte) Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$, Teil III.

(i) Sei $y \in \mathbb{H}_0 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß $-\kappa_y$ und S_y auf $\mathbb{H}_0$ übereinstimmen.
Hinweis: Rechnen Sie $S_y(x)$ für $x \in \mathbb{H}_0$ einfach aus!

(ii) Folgern Sie mit Aufgabe 2 von Blatt 9, daß Φ surjektiv ist.

(iii) Sei

$$\mathrm{E}(\mathbb{H}) := \{x \in \mathbb{H} \mid \|z\| = \sqrt{(z,z)} = 1\}$$

die Menge der Quaternionen der Länge 1. Schließen Sie aus (ii), daß sogar die Einschränkung

$$\Phi \restriction \mathrm{E}(\mathbb{H}) : \mathrm{E}(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}(3) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

surjektiv ist.

(iv) Zeigen Sie, daß der Kern der Abbildung in (iii) gerade $\{+1, -1\}$ ist, d.h.

$$\mathrm{Kern}(\Phi \restriction \mathrm{E}(\mathbb{H})) = \{\pm 1\}.$$

Hinweis: Sie können dabei Teil (ii) verwenden.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/