Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 17.7.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 12

Keine Abgabe. Dieses Blatt wird nicht korrigiert oder bewertet.

Aufgabe 1. $\{e_1, e_2, e_3\}$ bzw. $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ seien die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Betrachten Sie die Basis

$$\left\{ a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ bzw. die Basis

$$\left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$, und stellen Sie die $a_i \otimes b_j \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4$ als Linearkombination der $e_k \otimes e'_l$ dar, $1 \leq i, k \leq 3$, $1 \leq j, l \leq 4$.

Solution

Simply using the bilinearity of $\otimes$, we have:

$$\begin{aligned} a_1 \otimes b_1 &= (e_1 + 2e_2) \otimes (e'_1 + e'_2 - e'_4) \\ &= e_1 \otimes e'_1 + e_1 \otimes e'_2 - e_1 \otimes e'_4 + 2e_2 \otimes e'_1 + 2e_2 \otimes e'_2 - 2e_2 \otimes e'_4. \end{aligned}$$

Similarly for all other cases.

Note: With respect to the basis consisting of the $e_i \otimes e'_j$, ordered lexicographically on the indexes (i.e. $e_i \otimes e'_j \leq e_k \otimes e'_l \iff (i < k$, or, $i = k$ and j<l)), each element of $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4$ is represented by a column vector in $\mathbb{R}^{12}$.

There also is a natural identification of $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4$, with the basis consisting of the $e_i \otimes e'_j$, and the vector space of 3×4-matrices over $\mathbb{R}$. Under this identification, we have:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

I think this representation may help explain the $\otimes$ "operation" on vectors. However, I think one should not use this representation without explaining clearly what is meant with it.

Aufgabe 2. f sei der Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

bez. einer Basis e_1, e_2, e_3, und g sei der Endomorphismus des $\mathbb{R}^4$, der bez. einer Basis e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Berechnen Sie die Matrix von $f \otimes g$ bez. der Basis $\{e_i \otimes e'_j \mid 1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 4\}$.

Solution
Again we consider the basis consisting of the $e_i \otimes e'_j$ as ordered lexicographically on the indexes.

Recall:

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w).$$

Hence, using column vectors to denote the corresponding linear combinations of the elements of the standard bases, we have:

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(e_1 \otimes e'_1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ in the representation introduced above.} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

The above is the first column of the matrix of $f \otimes g$ with respect to the basis consisting og the $e_i \otimes e'_j$.

The other columns are calculated similarly.

One obtains the matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & -6 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. V sei ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $e_1, \dots, e_m$, W entsprechend mit Basis $e'_1, \dots, e'_n$. Bezüglich der Basis $\{e_i \otimes e'_j \mid i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}\}$ von $V \otimes W$ läßt sich jedes Element $x \in V \otimes W$ schreiben als

$$x = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i \otimes e'_j \qquad (\star).$$

Ein Element $x \in V \otimes W$ heißt reiner Tensor (auch: zerlegbar), falls er von der Gestalt $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$, ist.

(a) Zeigen Sie, daß x genau dann ein reiner Tensor ist, wenn $\operatorname{Rang}(\alpha_{ij})_{i,j} \leq 1$ gilt, wobei α_{ij} durch $(\star)$ bestimmt sei.

(b) Schließen Sie, daß i.a. *nicht* alle Elemente von $V \otimes W$ die Form $v \otimes w$ haben.

(c) Betrachten Sie für $K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^3$ und Basen e_1, e_2, e_3 bzw. e'_1, e'_2, e'_3 die Matrix

$$(\alpha_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

und schreiben Sie das gemäß $(\star)$ entsprechende x als $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$.

Solution

(a) Claim: x is a pure tensor iff $\operatorname{rank}(\alpha_{ij})_{ij} \leq 1$.

Proof:

($\Rightarrow$) Suppose x is a pure tensor, i.e. $x = v \times w$ for some $v \in V$, $w \in W$.

Let $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ be such that

$$v = \sum_i \alpha_i e_i, \quad w = \sum_i \beta_i e'_i.$$

Hence

$$x = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j e_i \otimes e'_j.$$

Now simply note that the rank of the matrix $(\alpha_i \beta_j)_{ij}$ is at most one.

($\Leftarrow$) Suppose $x = \sum_{ij} \alpha_{ij} e_i \otimes e'_j$ and $\mathrm{rank}(\alpha_{ij})_{ij} \leq 1$.

In looking for an argument, it may be useful to first consider the following special case: suppose that for all $i \neq 1$, $\alpha_{ij} = 0$. Then:

$$x = \sum_{ij} \alpha_{ij} e_i \otimes e'_j = \sum_j \alpha_{1j} e_1 \otimes e'_j = e_1 \otimes (\sum_j \alpha_{1j} e'_j) = e_1 \otimes w,$$

where $w := \sum_j \alpha_{1j} e'_j \in W$. So we see that x is a pure tensor.

Now the general case. Thinking in terms of rows, that $\mathrm{rank}(\alpha_{ij})_{ij} \leq 1$ implies that there is a regular $m \times m$-matrix B such that, for the matrix

$$(\alpha'_{ij})_{ij} := B(\alpha_{ij})_{ij},$$

for every $i \neq 1$, $\alpha'_{ij} = 0$. Hence

$$C(\alpha'_{ij})_{ij} = (\alpha_{ij})_{ij},$$

where $C := B^{-1}$. Let $C = (\gamma_{ij})_{ij}$. Therefore we have

$$\alpha_{ij} = \sum_k \gamma_{ik} \alpha'_{kj}.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i \otimes e'_j \\
&= \sum_{i,j} (\sum_k \gamma_{ik} \alpha'_{kj}) e_i \otimes e'_j \\
&= \sum_{k,j} \alpha'_{kj} (\sum_i \gamma_{ik} e_i) \otimes e'_j \\
&= \sum_{k,j} \alpha'_{kj} c_k \otimes e'_j \quad \text{ where } c_k := \sum_i \gamma_{ik} e_i \in V \\
&= \sum_j \alpha'_{1j} c_1 \otimes e'_j \\
&= c_1 \otimes (\sum_j \alpha'_{1j} e'_j) \\
&= c_1 \otimes w \quad \text{ where } w := \sum_j \alpha'_{1j} e'_j \in W.
\end{aligned}$$

So x is a pure tensor.

(b) Whenever $\dim V \geq 2$ and $\dim W \geq 2$, for arbitrary bases $e_1, \ldots, e_m$ fo V and $e'_1, \ldots, e'_n$ of W the element

$$e_1 \otimes e'_1 + e_2 \otimes e'_2$$

of $V \otimes W$ is not a pure tensor, by (a).

(c) Consider the matrix $(\alpha_{ij})_{ij}$ above. Note

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Hence, as in the proof in (a),

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i \otimes e'_j \\ &= c_1 \otimes (\sum_j \alpha'_{1j} e'_j) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Es seien U, V, W Vektorräume. Die Komposition von linearen Abbildungen ist eine bilineare Abbildung

$$\circ : L(V, W) \times L(U, V) \to L(U, W).$$

Zeigen Sie, daß sie der Vejüngung

$$(W \bigotimes V^*) \bigotimes (V \bigotimes U^*) \to (W \bigotimes U^*)$$

enspricht.

Solution

In fact, we assume U, V, W are finite-dimensional. (Otherwise, we only have the isomorphism between $W \bigotimes V^*$ and the subspace of $L(V, W)$ consisting of all linear maps of finite rank. Therefore, in principle, only composition of such linear maps is induced by the contraction (Verjünung).)

Recall: We have an isomorphism from $W \bigotimes V^*$ to $L(V, W)$, which we shall call $F_{V,W}$, defined by

$$a \mapsto f_a$$

where $f_a(w) := \mathrm{v}_{V,W}(a \otimes w)$ and $\mathrm{v}_{V,W} : W \otimes V^* \otimes V$ is the linear map defined (on pure tensors) by

$$\mathrm{v}_{V,W}(w \otimes \lambda \otimes v) := \lambda(v) w.$$

(and extended by linearity).

What we want to show is that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
(W \otimes V^*) \times (V \otimes U^*) & \longrightarrow & W \otimes U^* \\
\Big\downarrow {\scriptstyle F_{L,W} \times F_{U,V}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle F_{U,W}} \\
L(V,W) \times L(U,V) & \xrightarrow{\ \circ\ } & L(U,W)
\end{array}$$

where the map at the top is the restriction of the contraction $(W \otimes V^*) \otimes (V \otimes U^*) \to W \otimes U^*$ to the subspace $(W \otimes V^*) \times (V \otimes U^*)$, which is where the map $F_{L,W} \times F_{U,V}$ is defined.

This amounts to showing the following: for any $w \in W, \lambda \in V^*, v \in V, \mu \in U^*$, we have:

$$f_{w\otimes\lambda} \circ f_{v\otimes\mu} = \lambda(v) f_{w\circ\mu}.$$

(This extends to arbitrary elements of $(W \otimes V^*) \times (V \otimes U^*)$ by linearity.)

Indeed, for all $u \in U$,

$$\begin{aligned}
[f_{w\otimes\lambda} \circ f_{v\otimes\mu}](u) &= f_{w\otimes\lambda}(\mathrm{v}_{U,V}(v \otimes \mu \otimes u)) \\
&= f_{w\otimes\lambda}(\mu(u)v) \\
&= \mathrm{v}_{V,W}(w \otimes \lambda \otimes \mu(u)v) \\
&= \lambda(\mu(u)v)w \\
&= \mu(u)\lambda(v)w \\
&= \lambda(v)\, \mathrm{v}_{U,W}(w \otimes \mu \otimes u) \\
&= \lambda(v) f_{w\otimes\mu}(u)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$, Teil IV.
Sie haben in Teilen II und III einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $E(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ mit 2-elementigen Fasern kennengelernt. In dieser Aufgabe wird abschließend gezeigt, daß $E(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SU}_2$.

(a) Sei $v \in \mathbb{H}_0$, $\|v\| = 1$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot v \subset \mathbb{H}$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation von Quaternionen) ein Körper ist, der vermöge

$$\mathbb{C} \ni r + si \mapsto r \cdot 1 + s \cdot v \in \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot v$$

zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen isomorph ist.
Dies gilt insbesondere für $v = i$. Wir identifizieren von nun an $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$.

Im folgenden ist es günstig, sogenannte Rechtsvektorräume zu betrachten: Die Axiome für einen K-Vektorraum, genauer für einen K-Linksvektorraum, kennen Sie. Ein K-Rechtsvektorraum ist eine abelsche Gruppe M mit einer Multiplikation $M \times K \to M$, so daß

1. $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$

2. $x(\alpha+\beta) = x\alpha + y\beta$
3. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$
4. $x \cdot 1 = x$.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}$ mit der üblichen Addition und der Festsetzung

$$z \cdot \alpha := z\alpha, \quad z \in \mathbb{H}, \quad \alpha \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$$

(auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens steht die Multiplikation von Quaternionen) zu einem $\mathbb{C}$-Rechtsvektorraum mit Basis $\{1, j\}$ wird. Dieser Vektorraum sei nun mit $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, daß für $x \in \mathbb{H}$ die Abbildung

$$f_x : z \mapsto xz$$

ein Endomorphismus von $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ ist und daß

$$\mathbb{H} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \quad x \mapsto f_x,$$

ein injektiver Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren ist.

(d) Rechnen Sie für $x \in \mathbb{H}$ die bez. der Basis $\{1, j\}$ von $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ zu f_x gehörende Matrix aus. *Hinweis:* Rechnen Sie am besten erst f_1, f_i, f_j, f_k aus, dann für $r, s \in \mathbb{R}$ $f_{r+si} = f_r + f_s f_i = r f_1 + s f_1 f_i$, schließlich für $\alpha, \beta \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$ $f_{\alpha+j\beta} = f_\alpha + f_j f_\beta$.

(e) Wegen (c) ist $E(\mathbb{H})$ isomorph zu $f(E(\mathbb{H}))$. Zeigen Sie, daß $f(E(\mathbb{H}))$ gerade SU_2 ist.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/`