Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 17.7.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 12

Keine Abgabe. Dieses Blatt wird nicht korrigiert oder bewertet.

Aufgabe 1. $\{e_1, e_2, e_3\}$ bzw. $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ seien die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Betrachten Sie die Basis

$$\left\{ a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ bzw. die Basis

$$\left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$, und stellen Sie die $a_i \otimes b_j \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4$ als Linearkombination der $e_k \otimes e'_l$ dar, $1 \leq i, k \leq 3$, $1 \leq j, l \leq 4$.

Aufgabe 2. f sei der Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

bez. einer Basis e_1, e_2, e_3, und g sei der Endomorphismus des $\mathbb{R}^4$, der bez. einer Basis e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Berechnen Sie die Matrix von $f \otimes g$ bez. der Basis $\{e_i \otimes e'_j \mid 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 4\}$.

Aufgabe 3. V sei ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $e_1, \ldots, e_m$, W entsprechend mit Basis $e'_1, \ldots, e'_n$. Bezüglich der Basis $\{e_i \otimes e'_j \mid i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}\}$ von $V \otimes W$ läßt sich jedes Element $x \in V \otimes W$ schreiben als

$$x = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i \otimes e'_j \qquad (\star).$$

Ein Element $x \in V \otimes W$ heißt reiner Tensor (auch: zerlegbar), falls er von der Gestalt $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$, ist.

(a) Zeigen Sie, daß x genau dann ein reiner Tensor ist, wenn $\operatorname{Rang}(\alpha_{ij})_{i,j} \leq 1$ gilt, wobei α_{ij} durch $(\star)$ bestimmt sei.

(b) Schließen Sie, daß i.a. *nicht* alle Elemente von $V \otimes W$ die Form $v \otimes w$ haben.

(c) Betrachten Sie für $K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^3$ und Basen e_1, e_2, e_3 bzw. e'_1, e'_2, e'_3 die Matrix

$$(\alpha_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

und schreiben Sie das gemäß $(\star)$ entsprechende x als $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$.

Aufgabe 4. Es seien U, V, W Vektorräume. Die Komposition von linearen Abbildungen ist eine bilineare Abbildung

$$\circ : L(V, W) \times L(U, V) \to L(U, W).$$

Zeigen Sie, daß sie der Vejüngung

$$(W \bigotimes V^*) \bigotimes (V \bigotimes U^*) \to (W \bigotimes U^*)$$

enspricht.

Aufgabe 5. Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$, Teil IV.
Sie haben in Teilen II und III einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $E(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ mit 2-elementigen Fasern kennengelernt. In dieser Aufgabe wird abschließend gezeigt, daß $E(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SU}_2$.

(a) Sei $v \in \mathbb{H}_0$, $\|v\| = 1$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot v \subset \mathbb{H}$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation von Quaternionen) ein Körper ist, der vermöge

$$\mathbb{C} \ni r + si \mapsto r \cdot 1 + s \cdot v \in \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot v$$

zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen isomorph ist.
Dies gilt insbesondere für $v = i$. Wir identifizieren von nun an $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$.

Im folgenden ist es günstig, sogenannte Rechtsvektorräume zu betrachten: Die Axiome für einen K-Vektorraum, genauer für einen K-Linksvektorraum, kennen Sie. Ein K-Rechtsvektorraum ist eine abelsche Gruppe M mit einer Multiplikation $M \times K \to M$, so daß

1. $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$
2. $x(\alpha + \beta) = x\alpha + y\beta$
3. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$
4. $x \cdot 1 = x$.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}$ mit der üblichen Addition und der Festsetzung

$$z \cdot \alpha := z\alpha, \quad z \in \mathbb{H}, \quad \alpha \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$$

(auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens steht die Multiplikation von Quaternionen) zu einem $\mathbb{C}$-Rechtsvektorraum mit Basis $\{1, j\}$ wird. Dieser Vektorraum sei nun mit $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, daß für $x \in \mathbb{H}$ die Abbildung

$$f_x : z \mapsto xz$$

ein Endomorphismus von $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ ist und daß

$$\mathbb{H} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(\mathbb{H}_\mathbb{C}) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \quad x \mapsto f_x,$$

ein injektiver Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren ist.

(d) Rechnen Sie für $x \in \mathbb{H}$ die bez. der Basis $\{1, j\}$ von $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ zu f_x gehörende Matrix aus.
Hinweis: Rechnen Sie am besten erst f_1, f_i, f_j, f_k aus, dann für $r, s \in \mathbb{R}$ $f_{r+si} = f_r + f_s f_i = rf_1 + sf_1 f_i$, schließlich für $\alpha, \beta \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$ $f_{\alpha + j\beta} = f_\alpha + f_j f_\beta$.

(e) Wegen (c) ist $E(\mathbb{H})$ isomorph zu $f(E(\mathbb{H}))$. Zeigen Sie, daß $f(E(\mathbb{H}))$ gerade SU_2 ist.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/`