Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 1.5.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 2

Abgabe bis Mittwoch 9.5.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Zeigen Sie: Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann nilpotent, wenn in der Diagonalen nur Nullen stehen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann besitzt φ eine Zerlegung der Gestalt $\varphi = \delta + \omega$, wobei δ ein diagonalisierbarer Endomorphismus ist und ω ein nilpotenter Endomorphismus ist. Ist diese Zerlegung eindeutig?
Hinweis: Untersuchen Sie die Wirkung von δ, ω auf die Haupträume von φ.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Definition. Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und φ ein Endomorphismus von V. Ein normiertes Polynom p mit Koeffizienten aus K von minimalem Grad mit $p(\varphi) = o$ heißt *Minimalpolynom* von φ, Min_φ.

Zeigen Sie (ohne den Satz von Hamilton zu verwenden):

(a) Es sei p ein Minimalpolynom von φ. Dann teilt p alle Polynome q mit $q(\varphi) = 0$. Folgern Sie, daß das Minimalpolynom eindeutig bestimmt ist, falls es existiert.

(b) Das Minimalpolynom existiert und hat einen Grad $\leq n^2$.

Hinweis: Sie dürfen folgenden Satz verwenden: Zu Polynomen $p, q \in K[x]$, $q \neq o$, existieren eindeutig bestimmte Polynome s und r mit $p = sq + r$, $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(q)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ gegeben mit $A^k = 0$ für eine geeignete Zahl $k \in \mathbb{N}$. Man bezeichnet eine solche Matrix A als nilpotent.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und das charakteristische Polynom zu A.
Hinweis: Ein normiertes Polynom läßt sich über $\mathbb{C}$ als Produkt von Linearfaktoren darstellen.

(b) Zeigen Sie: Ist $A^{k-1}v \neq 0$ für ein $v \in \mathbb{C}^n$, so sind die Vektoren $v, Av, \ldots, A^{k-1}v$ linear unabhängig.

(c) Folgern Sie aus (b), daß aufgrund unserer Voraussetzung schon $A^n = 0$ gelten muß.

Nachzudenken: Was ändert sich in (a) – (c), wenn man $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{C}$ betrachtet?

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/