Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 15.5.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 4

Abgabe bis Mittwoch 23.5.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. Es seien V, W Vektorräume (nicht notwendig endlichdimensional) und $f \in \mathrm{L}(V, W)$.

(a) Zeigen Sie, daß f^{**} eine Fortsetzung von f ist. D.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \\ \Phi\big\uparrow & & \big\uparrow\Phi \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

kommutiert.
Bemerkung: Man sagt dafür auch, daß die Familie $\Phi_V : V \to V^{**}$ eine *natürliche Transformation* von id nach $**$ ist.

(b) Zeigen Sie: wenn f^* injektiv ist, dann ist f surjektiv.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für eine beliebige — d.h. nicht notwendig endliche — Indexmenge I und Vektorräume V_i, $i \in I$, gilt:

$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right)^* \simeq \prod_{i\in I} V_i^*.$$

Zur Erinnerung: Für Vektorräume W_i, $i \in I$, gilt:

$$\prod_{i\in I} W_i := \{(w_i)_{i\in I} \mid w_i \in W_i\}$$

und

$$\prod_{i\in I} W_i \succeq \bigoplus_{i\in I} W_i := \{(w_i)_{i\in I} \mid w_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Aufgabe 3. Sei A eine quadratische Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann ist $A \sim A^\top$(, d.h. es existiert eine reguläre Matrix $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ mit $A^\top = Q^{-1}AQ$; $A, A^\top$ sind ähnlich).
Hinweis: Zerlegen Sie den Beweis in folgende Schritte:

(i) Sei $A = J_\lambda^k$. Dann ist $A \sim A^\top$. (Eine Permutation der Basiselemente genügt sogar!)

(ii) Folgern Sie, daß $A \sim A^\top$, falls A in Jordan-Normalform gegeben ist.

(iii) Zeigen Sie nun die gewünschte Behauptung.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn für alle Linearformen λ gilt: $\lambda A = 0 \Rightarrow \lambda b = 0$. (Dabei seien x, b Spaltenvektoren, und λ werde — wie in der Vorlesung — als Zeilenvektor aufgefaßt.)
Hinweis: Für $U \preceq V^*$ sei $U^\perp$ definiert als

$$U^\perp = \{v \in V \mid \lambda v = 0 \text{ für alle } \lambda \in U\}.$$

Sei nun $f : V \to W$ linear, V, W seien endlichdimensionale Vektorräume. Zeigen Sie zunächst $\mathrm{im} f = (\mathrm{Ker} f^*)^\perp$. Schließen Sie daraus auf die Behauptung.

(b) Folgern Sie mit a), daß das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist, indem Sie eine geeignete Linearform λ angeben.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/`