Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 22.5.2012

Prof. Dr. Martin Ziegler

Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 5

Abgabe bis Mittwoch 6.6.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Bestimmen Sie für den $\mathbb{R}^3$ zu folgender Basis die duale Basis:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h., geben Sie die Koordinaten der dualen Basis bzgl. der zur Standardbasis dualen Basis an.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Dies ist die Fortsetzung von Aufgabe 3 von Blatt 2.

(a) Sei $U \preceq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Dann gilt

$$\mathrm{Min}_\varphi \quad \text{teilt} \quad \mathrm{Min}_{\varphi\restriction U} \cdot \mathrm{Min}_{\bar{\varphi}}.$$

Dabei ist $\bar{\varphi}$ der durch φ auf V/U induzierte Endomorphismus.

(b) Sei V zyklisch, d.h. von der Form $V = \langle \varphi^i(x) : i \geq 0 \rangle$ für ein $x \in V$. Dann ist $\mathrm{Min}_\varphi = P_\varphi$.
Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 2.a von Blatt 1 an.

(c) Zeigen Sie, daß gilt: Min_φ teilt P_φ. (Beachten Sie — vgl. Vorlesung — $P_\varphi = P_{\varphi\restriction U} \cdot P_{\bar{\varphi}}$, falls U ein φ-invarianter Unterraum ist.) Folgern Sie $\mathrm{Grad}(\mathrm{Min}_\varphi) \leq n$ und den *Satz von Cayley*, d.h.

$$P_\varphi(\varphi) = 0.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei V ein Vektorraum beliebiger Dimension. Für eine Teilmenge S von V definieren wir

$$S^\perp := \{\lambda \in V^* \mid \lambda(v) = 0 \ \text{ für alle } v \in S\}.$$

Außerdem, für ein Unterraum A von V^* sei $A^\perp$ definiert als

$$A^\perp = \{v \in V \mid \lambda v = 0 \text{ für alle } \lambda \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie für $S \subset V$, daß $S^{\perp\perp} = \langle S \rangle$. Insbesondere gilt für einen Untervektorraum U von V, daß $U^{\perp\perp} = U$.

(b) Zeigen Sie, daß für Unterräume A von V^* gilt $A \subset A^{\perp\perp}$; geben Sie ein Beispiel an für $A \subsetneqq A^{\perp\perp}$.
Hinweis: Betrachten Sie $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$.

---

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/`