Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 5.6.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 6

Abgabe bis Mittwoch 13.6.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. Seien $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$ definieren.

(a) $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2$

(b) $f(x, y) = x_1x_2 - y_1y_2$

(c) $f(x, y) = x_1 + y_1$

(d) $f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß sich Bilinearformen auf V und lineare Abbildungen aus $\mathrm{L}(V, V^*)$ entsprechen. Sei nun $(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V und $\Psi : V \to V^*$ die zugehörige lineare Abbildung. Durch Identifizieren von V und V^{**} induziert Ψ^* eine lineare Abbildung

$$V \simeq V^{**} \xrightarrow{\Psi^*} V^*,$$

die somit wieder einer Bilinearform entspricht. Welcher?

Aufgabe 3. Eine Bilinearform $(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ auf einem K-Vektorraum V heißt *(unter Automorphismen von V) invariant*, falls für alle $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ und alle $x, y \in V$ gilt

$$(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Zeigen Sie: Eine invariante reguläre Bilinearform $\neq O$ gibt es genau in den folgenden Fällen:

$$\begin{array}{lll} \dim V = 1 & \text{und} & |K| = 2 \quad \text{oder} \quad |K| = 3. \\ \dim V = 2 & \text{und} & |K| = 2. \end{array}$$

Geben Sie diese Formen an.
*Hinweis:*Beachten Sie, daß bei einer invarianten Bilinearform alle (x, y), x, y linear unabhängig, den gleichen Wert haben, desgleichen alle (x, x), $x \neq 0$. (Warum?) Denken Sie für die Beispiele an die Determinantenform.

Aufgabe 4. Es seien $a_0, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen („Stützpunkte“). Sei

$$V := \{w : \{a_0 \ldots, a_n\} \to \mathbb{R}\},$$

sei

$$P := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{grad}(p) \leq n\},$$

und sei

$$(w,p) := \sum_{0\leq i\leq n} w(a_i)p(a_i).$$

Zeigen Sie, daß $V, P, (\cdot\,,\cdot)$ ein duales Paar bildet.

[0] http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/