Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 12.6.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 7

Abgabe bis Mittwoch 20.6.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^4$, die bezüglich der Standardbasis durch die folgenden Matrizen gegeben werden, Orthogonalbasen und Diagonalisierungen; d.h., ermitteln Sie jeweils eine Basis, so daß die entsprechende Matrix Diagonalgestalt hat, und geben Sie diese an.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Weiterhin sei eine symmetrische Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$ gegeben, die auf U regulär ist. Zeigen Sie:

$$V = U \oplus U^{\perp},$$

wobei $U^{\perp} = \{x \in V : (x, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$.
(Zusatz: Es genügt, daß U endlichdimensional ist)

Aufgabe 3. Es sei $(\ ,\ ) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ die Minkowski-Bilinearform, definiert gemäß

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - \xi_4\eta_4.$$

Weiterhin sei der Endomorphismus f gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den zu f adjungierten Endomorphismus f^t.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: $(A, B) := \mathrm{Spur}(A^t B)$ definiert eine reguläre symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum der $m \times n$-Matrizen.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/`