

**Blatt 8**

Abgabe bis Mittwoch 27.6.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

**Aufgabe 1.** Es sei  $F \supset K$  eine endliche Körpererweiterung, d.h., die Dimension von  $F$  als  $K$ -Vektorraum sei endlich; sei außerdem  $\chi(K) = 0$  (d.h.  $n \cdot 1 \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ). Für  $a \in F$  sei erklärt

$$\lambda_a : F \rightarrow F, \quad x \mapsto ax.$$

$\lambda_a$  ist eine lineare Abbildung des  $K$ -Vektorraumes  $F$  (warum?) und hat als solche eine Spur. (Das ist die Summe der Diagonalelemente in der zugehörigen Matrix bez. einer beliebigen Basis.) Zeigen Sie: Durch

$$(a, b) := \text{Spur}(\lambda_{ab}), \quad a, b \in F,$$

wird auf  $F$  eine reguläre symmetrische Bilinearform definiert, die sogenannte Spurform.

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Spurform der Körpererweiterung  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ , das heißt, rechnen Sie  $(a, b)$  aus, und ermitteln Sie deren Signatur.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, daß  $\mathbb{R}[x]$  zusammen mit

$$(f, g) := \int_{-1}^1 fg \, dx$$

ein Vektorraum mit positiv definiter symmetrischer Bilinearform ist. Wenden Sie dann auf die Basis  $1, x, x^2, x^3$  des Unterraums der Polynome vom Grad höchstens 3,  $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad} f \leq 3\}$ , das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an.

*Bemerkung:* Die Basiselemente, die Sie so erhalten, sind die ersten vier der Legendreschen Polynome,  $P_0, \dots, P_3$ .

**Aufgabe 4.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt. Eine Drehung ist eine orthogonale Abbildung mit Determinante 1. Diese Aufgabe zeigt unter anderem, daß jede solche Drehung eine Verkettung von (speziellen) Drehungen um die Koordinatenachsen ist. Dabei genügen sogar zwei Achsen!

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  sei

$$T_1(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } x\text{-Achse}),$$

$$T_3(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } z\text{-Achse}).$$

(a) Zeigen Sie, daß jede Drehung  $T$  die Form

$$T_3(\psi) \circ T_1(\vartheta) \circ T_3(\varphi)$$

hat. (Man nennt  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\vartheta$  die Eulerschen Winkel von  $T$ .) Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Wählen Sie  $\psi$  so, daß  $T_3(-\psi) \circ T =: T'$  die Form

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

hat. (Warum geht das?)

2. Wählen Sie  $\vartheta$  mit  $T_1(-\vartheta) \circ T' =: T''$  von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

(Und warum geht das?)

3. Folgern Sie, daß  $T''$  dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat, und schließen Sie nun, daß es  $\varphi$  gibt, so daß  $T'' = T_3(\varphi)$ .

(b) Rechnen Sie die Matrix  $T_3(\psi) \circ T_1(\vartheta) \circ T_3(\varphi)$  aus; wenn Sie Lust haben, können Sie rechnerisch überprüfen, daß dies in der Tat eine orthogonale Matrix ist.