Übungen zur Vorlesung **Lineare Algebra II** (SS 2012) 26.6.2012
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Juan Diego Caycedo

Blatt 9

Abgabe bis Mittwoch 4.7.12 um 12 Uhr im UG, Math. Inst., Eckerstr. 1.

Aufgabe 1. Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten a_1, a_2, a_3.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Flächeninhalt eines geeigneten Parallelograms.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, die Gruppe der orthogonalen Abbildungen eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes V, durch Spiegelungen an Hyperflächen erzeugt wird.
Unter einer Spiegelung an einer Hyperfläche eines Euklidischen Raumes V versteht man eine lineare Abbildung der Form $u + w \mapsto -u + w$, wobei $V = U \oplus W$, $\dim W = \dim V - 1$, $u \in U$ und $w \in W$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie zunächst, daß je zwei Vektoren der Länge 1 durch eine geeignete orthogonale Spiegelung an einer Hyperfläche ineinander überführt werden können. (Hinweis: Lassen Sie sich von der Anschauung im $\mathbb{R}^3$ leiten.)

(ii) Zeigen Sie dann, daß je zwei ON-Basen des n-dimensionalen Vektorraums V durch ein Produkt von höchstens n orthogonalen Spiegelungen an Hyperflächen aufeinander abgebildet werden können, und folgern Sie, daß jede orthogonale Abbildung Produkt von höchstens n orthogonalen Spiegelungen an Hyperflächen ist.

Aufgabe 3. V sei ein Euklidischer Raum und $\mathfrak{B}$ sei eine Orthonormalbasis von V. Der linearen Abbildung f sei bzgl. $\mathfrak{B}$ die Matrix A zugeordnet. Die Norm von A werde definiert als

$$\|A\| := \max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Zeigen Sie, daß $\|A\|^2$ gleich dem größten Eigenwert von $A^\top A$ ist.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler Euklidischer Raum, sei $U \preceq V$ von der Dimension $n-1$. $[\cdot,\cdot]$ sei eine symmetrische Bilinearform auf V. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation läßt sich $[\cdot,\cdot]$ (bzw. $[\cdot,\cdot] \restriction U \times U$, die Einschränkung von $[\cdot,\cdot]$ auf $U \times U$) bez. einer geeigneten ON-Basis von V (bzw. von U) durch eine Diagonalmatrix darstellen. $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ (bzw. $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$) seien die Elemente auf der Diagonalen dieser Matrix. Zeigen Sie, daß

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Minimax-Prinzip.

[0] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/caycedo/lehre/ss12_la2/`