Mathematik II für Informatiker — Sommer 2016
Übungsblatt 2
Dozent: PD Dr. Markus Junker. Assistent: Dr. Juan Diego Caycedo.

1. **Restklassen. (8 Punkte)** Sei $N > 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen die folgende Relation

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; N \text{ teilt } x - y,$$

d.h. zwei Zahlen heißen äquivalent, wenn ihre Differenz durch N teilbar ist.

   (a) Beweisen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden *Restklassen* modulo N genannt. Die Menge dieser Restklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Die zu x gehörige Äquivalenzklasse wird mit $\overline{x}$ bezeichnet.

   (b) Begründen Sie, dass $\{0, \ldots, N-1\}$ ein Vertretersystem ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $\overline{x}+\overline{y} := \overline{x+y}$ und $\overline{x}\cdot\overline{y} := \overline{x \cdot y}$ gültige Definitionen einer Operation auf der Menge der Restklassen sind, d.h. nicht von der Wahl der Vertreter x und y abhängen.

   (d) Zeigen Sie, dass die Menge der Restklassen zusammen mit der oben definierten Operation „+“ eine Gruppe ist und dass diese Gruppe isomorph zu $(\mathbb{Z}_N, +_N)$ ist, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, so dass *(i)* für alle $a, b \in \mathbb{Z}_N$, $f(a +_N b) = f(a) + f(b)$, *(ii)* $f(0) = \overline{0}$, und *(iii)* für alle $a \in \mathbb{Z}_N$, $f(-_N a) = -f(a)$.

2. **Unterverktorräume.** Sei V ein k-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt k-*Untervektorraum* (auch k-Unterraum), falls $0 \in U$ und sich die Abbildungen $\cdot : k \times V \to V$ und $+ : V \times V \to V$ auf U einschränken lassen. Man kann zeigen, dass U in diesem Fall wirklich ein k-Vektorraum ist, und somit diese Bezeichnung sinnvoll ist.

   Bestimmen Sie, welche der folgenden Teilmengen ein $\mathbb{R}$-Unterverktorraum des $\mathbb{R}^3$ ist:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$,

   (b) $\left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (c) $T_1 := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   (d) $T_2 := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   (e) $T_1 \cap T_2$,

   (f) $T_1 \cup T_2$.

Bitte wenden!

3. **Unendliche Folgen.** V sei die Menge der unendlichen $\{0, 1\}$-Folgen.

   (a) Zeigen Sie, dass V unter komponentenweise Addition und Multiplikation mit Skalaren ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

   (b) Sei W die Menge aller periodischen Folgen, d.h. die Teilmenge von V, in der jede Folge bestimmt ist durch die Wiederholung einer endlichen Folge (z.B. 010010010010... oder 101100101100101100...). Bestimmen Sie, ob W ein Untervektorraum von V ist.

Abgabe bis Fr 6.5.2016, 12:00 in die Kästen im EG des Instituts für Informatik, Geb. 51.