Mathematik II für Informatiker — Sommer 2016
Übungsblatt 5

Dozent: PD Dr. Markus Junker. Assistent: Dr. Juan Diego Caycedo.

1. **Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$.** Beschreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geometrisch, welche durch die folgende Matrix (bzgl. der Standardbasis) gegeben wird:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Welche Matrix beschreibt dieselbe Abbildung bzgl. der Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

2. **Berechnung von Potenzen.** Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung die durch

$$\varphi(v_i) = i \cdot v_i,$$

bestimmt ist, wobei für $i = 1, 2, 3$

$$v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e_i.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen A und D von φ bzgl. der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) bzw. bzgl. der Basis (v_1, v_2, v_3).

(b) Zeigen Sie: wenn $A = T^{-1}DT$, dann gilt $A^n = T^{-1}D^nT$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.
(Für eine quadratische matrix B und eine natürliche Zahl n, wird B^n definiert als das Produkt $B \cdots B$ (n mal). Insbesondere wird B^0 als die Einheitsmatrix definiert. Für invertierbares B, man definiere weiter, für negatives $n \in \mathbb{Z}$, $B^n := (B^{-1})^{|n|}$.)

(c) Bestimmen Sie A^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

3. **Eigenvektoren.** Die folgende Matrix hat Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Bestimmen Sie diese.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. **Kern und Bild.** Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, welche bzgl. der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

Abgabe bis Fr. 3.6.2016, 12:00 in die Kästen im EG des Instituts für Informatik, Geb. 51.