Mathematik II für Informatiker — Sommer 2016
Übungsblatt 6

Dozent: PD Dr. Markus Junker. Assistent: Dr. Juan Diego Caycedo.

1. **Gleichungssysteme.** Bestimmen Sie (mit dem Gaussverfahren) alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$:

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

2. **Invertieren.** Invertieren Sie die folgende Matrix (mit dem Gaussverfahren):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Vandermonde Determinante.** Sei k ein Körper, z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und $x, y, z \in k$. Beweisen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \neq 0$$

genau dann, wenn x, y und z verschieden sind.

4. **Invarianz des Skalarproduktes unter Drehungen.**

Beweisen Sie, dass eine Drehung im $\mathbb{R}^2$, also eine Abbildung, welche durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, das Skalarprodukt invariant lässt. Mit anderen Worten, rechnen Sie nach, dass

$$\langle M \cdot v, M \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ ist.

Zusatzfrage (4 Extrapunkte): Bestimmen Sie die Matrizen aller Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Skalarprodukt invariant lassen.

Abgabe bis Fr. 10.6.2016, 12:00 in die Kästen im EG des Instituts für Informatik, Geb. 51.