Mathematatik II für Informatiker — Sommer 2016
Übungsblatt 7

Dozent: PD Dr. Markus Junker. Assistent: Dr. Juan Diego Caycedo.

1. **Die Determinante als Volumen.** Zeigen Sie, dass für linear unabhängige $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, das Volumen des von a,b und c bestimmten Parallelepipeds gleich $|\det((a|b|c))|$ ist, d.h. der Betrag der Determinante der Matrix mit a,b,c als Spalten.

   Hinweis: Wenn $(a|b|c)$ eine Diagonalmatrix ist, ist die Gleichung leicht zu sehen. Den allgemeinen Fall kann man auf diesen Spezialfall zurückführen durch Anwendung von geeigneten Scherungen und Permutationen der Achsen (welche das Volumen nicht verändern).

   Bemerkung: Falls a, b, c linear abhängig sind, gilt es auch, da sowohl das Volumen als auch die Determinante Null sind.

2. **Orthogonales Komplement.** Sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

   Beweisen Sie, dass

   $$U^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

   ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$ gilt.

3. **Orthogonale Projektion.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

   (a) Es gibt eine lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $P \circ P = P$ so, dass $\mathrm{Kern}(P) = U^\perp$ und $\mathrm{Bild}(P) = U$. Geben Sie eine explizite Formel für P an.

   (b) P ist eindeutig bestimmt durch diese drei Eigenschaften.

   (c) Es gilt $\dim U + \dim U^\perp = n$.

4. **Binärer Hamming-Code.** Stellen Sie für den binären $[n, k, d] = [15, 11, 3]$-Hamming-Code die Erzeugermatrix G und die Prüfmatrix H in der Form

   $$G = \big(\mathrm{Id}_k \,|A\big) \qquad H = \big(-A^T|\,\mathrm{Id}_{n-k}\big)$$

   auf. Kodieren Sie den Vektor

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Fälschen Sie das Ergebnis ab, indem Sie ein beliebiges Bit verändern. Berechnen Sie anschließend das Syndrom und überprüfen Sie, dass es zum abgeänderten Bit korrespondiert (d.h. in der entsprechenden Spalte der Matrix H auftaucht).

Abgabe bis Fr. 17.6.2016, 12:00 in die Kästen im EG des Instituts für Informatik, Geb. 51.